



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الفرات الأوسط التقنية
المعهد التقني / النجف
قسم تقنيات الهندسة المدنية

المادة: الرياضيات المرحلة: الاولى

تدريسية المادة:

م.م. نور حيدر علي الخفاجي

الايميل الجامعي للتدريسية NoorHaider.inj@atu.edu.iq

العام الدراسي

٢٠٢٥-٢٠٢٦

الموضوع	الاسبوع
المصفوفات	الأول
أنواع المصفوفات	الثاني
العمليات على المصفوفات	الثالث
المحددات	الرابع
خواص المحددات	الخامس
المعادلات الخطية	السادس
المتجهات والقيم العددية	السابع
الضرب النقطي للمتجهات	الثامن
المساقط	التاسع
اللوغاريتمات	العاشر
الدوال المثلثية	الحادي عشر
الغاية	الثاني عشر
المشتقات	الثالث عشر
قاعدة السلسلة	الرابع عشر
مشتقات الدوال المثلثية او الدائرية	الخامس عشر
مشتقات الدوال اللوغاريتمية	السادس عشر
مشتقات الدوال الاسية	السابع عشر
التطبيقات الفيزيائية على المشتقات	الثامن عشر
التكامل غير المحدد	التاسع عشر
تكامل الدوال المثلثية	العشرون
التكامل المحدد	الحادي والعشرون
طرق التكامل (طريقة u, v)	الثاني والعشرون
طريقة تجزئة الكسور	الثالث والعشرون
طريقة القسمة الطويلة	الرابع والعشرون
الحجوم الدورانية	الخامس والعشرون
المساحات تحت المنحني	السادس والعشرون
الاعداد المركبة	السابع والعشرون
العمليات الإحصائية	الثامن والعشرون
الجدول الاحصائي	التاسع والعشرون
مقياس النزعة المركزية	الثلاثون

المقدمة

تُعَدّ الرياضيات من العلوم الأساسية التي تسهم في تنمية التفكير المنطقي والتحليل العلمي، وتؤدي دورًا مهمًا في فهم العديد من التطبيقات العلمية والعملية، لما تتضمنه من مفاهيم وقواعد وأساليب تساعد على حل المشكلات واتخاذ القرارات بصورة دقيقة ومنظمة.

هدف هذا الملف إلى تقديم محاضرات مادة الرياضيات بأسلوب علمي منظم ومبسط، بما يسهم في تعزيز فهم الطلبة للمفاهيم الرياضية الأساسية، وتنمية قدراتهم على التحليل والاستنتاج والتطبيق العملي. وقد رُوعي في إعداد المحاضرات تسلسل الموضوعات وترابطها، مع تضمين أسئلة تمهيدية في بداية كل محاضرة لتحفيز التفكير واستحضار المعلومات السابقة، وأسئلة ختامية في نهاية كل محاضرة لتقويم الفهم وترسيخ المعلومات المكتسبة.

ونأمل أن يكون هذا الملف مرجعًا علميًا نافعًا لطلبتنا الأعزاء، وأن يسهم في تطوير مهاراتهم العلمية وتحقيق أهدافهم الأكاديمية، متمنين لهم دوام النجاح والتوفيق في مسيرتهم الدراسية.

النظرة الشاملة

الفئة المستهدفة طلبة المرحلة الأولى في قسم تقنيات الهندسة المدنية في معهد تقني النجف جامعة الفرات الأوسط.

تتناول هذه المادة مجموعة من الموضوعات الأساسية، تبدأ بدراسة المصفوفات وأنواعها والعمليات عليها وخصائصها ومحدداتها، ثم تنتقل إلى موضوعات المعادلات الخطية والمتجهات والفضاءات المتجهة والضرب القياسي للمتجهات، بما يساعد الطالب على فهم العلاقات الجبرية وإجراء العمليات الرياضية بصورة صحيحة.

كما تتضمن المادة دراسة المشتقات والتكامل وتطبيقاته، والتعرف على الدوال الأصلية وقواعد التكامل وطرقه المختلفة، مثل التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزئة والتكامل بالكسور الجزئية، فضلاً عن تطبيقاته في حساب المساحات والحجوم والاعداد المركبة والعمليات الإحصائية وغيرها من المسائل الرياضية.

وتهدف المادة إلى ربط الجانب النظري بالتطبيق العملي، من خلال تقديم الأمثلة المحولة والمسائل التدريبية التي تساعد الطالب على اكتساب المهارات الحسابية والتحليلية، وتعزيز قدرته على التفكير المنظم والاستنتاج الرياضي.

وبذلك تمثل هذه المادة أساساً علمياً مهماً لتطوير مهارات الطالب في التحليل والاستنتاج وحل المشكلات، وتوظيف المعرفة الرياضية في دراسته الجامعية ومجالات تخصصه المستقبلية.

الاختبار القبلي:

١. تكون المصفوفتان متساويتان فقط اذا كانتا:

أ. لهما العدد نفسه من العناصر.

ب. لهما الرتبة نفسها والعناصر المتناظرة متساوية.

ج. لهما عدد الاعمدة نفسه.

٢. تسمى المصفوفة صفرية اذا كانت:

أ. تحتوي عنصر صفري.

ب. تحتوي صف جميع عناصره اصفار.

ج. جميع عناصرها اصفار.

٣. رتبة المصفوفة هي:

أ. عدد الصفوف أولا ثم عدد الاعمدة.

ب. عدد الصفوف فقط.

ج. عدد الاعمدة فقط.

الإجابة الصحيحة: ١. ب، ٢. ج، ٣. أ.

Matrices

المصفوفات

المصفوفة:- هي تنظيم عددي مرتب بشكل مستطيل بين قوسين وتخضع لمجموعة من القواعد والعمليات.

تتكون من مجموعة من الصفوف rows يرمز لها m وعدد من الاعمدة columns يرمز لها n .

رتبة المصفوفة:- لكل مصفوفة رتبة تتمثل بعدد الصفوف أولا ثم عدد الاعمدة ثانيا وتكتب

$m \times n$

مثال على ذلك:-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

$$c = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 23 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

وبصورة عامة اذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times n$ فإن A تكتب بالصورة:-

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

تساوي مصفوفتين: يقال ان المصفوفتين A,B متساويتان وتكتب $A=B$ اذا تحقق الشرطان معا:-

١. المصفوفتان A,B من نفس الرتبة.

٢. كل عنصر من المصفوفة الأولى A يساوي نظيره في الموقع من المصفوفة الثانية B.

مثلا:-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان متساويتان $A = B$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان غير متساويتين $A \neq B$

لان $a_{32} \neq b_{32}$ حيث ان $a_{32} = 7$ و $b_{32} = 2$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 9 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

المصفوفتان غير متساويتين $A \neq B$ لان الرتبة مختلفة.

الاختبار البعدي:

س١//

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان متساويتان $A = B$

س٢//

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 9 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

المصفوفتان متساويتان $A = B$

س٣//

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

ماهي رتبة المصفوفة؟

الإجابة 2,3 p:

انواع المصفوفات

الاختبار القبلي:

١. عرف المصفوفة.

٢. عرف رتبة المصفوفة.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

٣. ماهي رتبة المصفوفة

الإجابة الإجابة 1,2,3 p:

١. مصفوفة الصف Row Matrix :- هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد فقط.

$$[3 \ 0 \ 5]_{1 \times 3}$$

٢. مصفوفة العمود Colum Matrix :- هي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد فقط.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

٣. المصفوفة المربعة Square Matrix :- هي المصفوفة التي تكون فيها عدد الصفوف m

مساوي لعدد الأعمدة n.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

٤. المصفوفة القطرية Diagonal Matrix :- هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها اصفار

ماعدا العناصر الواقعة على القطر الرئيسي فيكون احدها على الأقل مغايرا للصفر.

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

٥. مصفوفة الوحدة Unit Matrix :- وهي مصفوفة قطرية يكون فيها كل من عناصر القطر

الرئيسي مساويا للواحد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٦. المصفوفة الصفرية Zero Matrix:- وهي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها اصفار ويرمز لها (0).

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الاختبار البعدي:

س١// ماهو نوع المصفوفة؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

س٢// هل المصفوفة مربعة؟

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

س٣// المصفوفة محايدة، صح ام خطأ؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

ماهي رتبة المصفوفة؟

الإجابة 3,4,5 p:

العملیات علی المصفوفات

الاختبار القبلي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

أ. صفرية ب. محايدة ج. مربعة

$$[3 \ 0 \ 5]_{1 \times 3} \quad ٢.$$

أ. قطرية ب. صفية ج. مربعة

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ٣.$$

أ. عمودية ب. محايدة ج. قطرية

الإجابة: ١. أ، ٢. ب، ٣. ج

١. الجمع والطرح:

Ex:-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

find $A + B, A - B$

Sol:-

$$\begin{aligned} 1) A + B &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2-2 & 4+0 & 7+1 \\ -6+3 & 3+4 & -1+7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$2) A - B = H.W$$

٢. ضرب مصفوفة في عدد حقيقي او القسمة عليه:-

Ex:-

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\text{find } 3A, \quad -A + 2B, \quad \frac{B}{-2}$$

Sol:-

$$3A = 3 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 3 & 3 \times 0 \\ 3 \times 1 & 3 \times 2 \\ 3 \times 6 & 3 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 6 \\ 18 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -A + 2B &= - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 0.4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -2 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 6 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -6 \\ 0 & -4.2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{B}{-2} = H.W$$

٣. حاصل ضرب مصفوفتين:

يمكن ضرب مصفوفتين فقط عندما يكون عدد اعمدة المصفوفة الأولى n_1 يساوي عدد صفوف m_2 المصفوفة الثانية. وان المصفوفة الناتج تكون من الرتبة $m_1 \times n_2$.

Ex:-

$$1) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$= [(1 \times -3) + (-2 \times 1) + (0.3 \times 10)] = [-2]$$

$$2) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

لا يمكن الضرب لان $n_1 \neq m_2$ (عدد الاعمدة $\neq$ عدد الصفوف)

$$3) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 20 \\ 15 & 0 & -12 \\ 23 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Find AB , BA , BC .

Sol:-

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (2 \times 1) + (1 \times -1) + (0 \times 3) & (2 \times 1) + (1 \times 2) + (0 \times -2) \\ (5 \times 1) + (-1 \times -1) + (3 \times 3) & (5 \times 1) + (-1 \times 2) + (3 \times -2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 15 & -3 \end{bmatrix}$$

$$BA = H.W$$

$$BC = ?$$

هل يمكن حسابها؟ ولماذا؟

س// هل عملية الضرب على المصفوفات ابداليه؟

H.W:-

$$A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = [3 \quad 0 \quad 0.5], \quad c = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الاختبار البعدي:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 0.4 \end{bmatrix} \quad \text{س//٨}$$

$$1) 3A, \quad 2) -A + 2B, \quad 3) \frac{B}{-2} \text{ find}$$

الإجابة p:7

المحددات Determinants

الاختبار القبلي:

$$A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = [3 \quad 0 \quad 0.5], \quad c = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ find } A \times B \times C . ١$$

المحدد:- هو عدد حقيقي يستخرج من المصفوفة المربعة، ويرمز له $\det(A)$ او $|A|$.

حساب المحددات من الرتبة 2×2 :-

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Ex:- Calculate the determinants for the following:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل //

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 6 - 4 = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - (-1) \times 5 = 0 + 5 = 5$$

حساب المحددات من الرتبة 3×3 :-

باستخدام طريقة العوامل المتممة (cofactors).

Ex:- find, such that $A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ 5 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A| = 5 \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -63$$

خواص المحددات:-

١. اذا كانت عناصر أي صف أو أي عمود جميعها اصفار فان قيمة المحدد تساوي صفر.
٢. اذا كانت عناصر أي صفين أو عمودين متساويين أو من مضاعفاتهما فان المحدد يساوي صفر.

For example:- Calculate the determinants for the following:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

العمود الثاني جميع عناصره اصفار، لذا المحدد يساوي صفر.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 18 & 2 \\ 3 & 10 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

عناصر العمود الاول تساوي عناصر العمود الثالث، لذا المحدد يساوي صفر.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

عناصر العمود الثاني هي مضاعفات عناصر العمود الاول، لذا المحدد يساوي صفر.

الاختبار البعدي:

Calculate the determinants for the following:

١) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

٢) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$

٣) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

المعادلات الخطية

الاختبار القبلي:

Calculate the determinants for the following: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 18 & 2 \\ 3 & 10 & 3 \end{vmatrix}$ p:10

قاعدة كرامر Grammar's Rule

لتكن $Ax = B$ نظام من المعادلات الخطية التي رتبها $n \times n$ وتحتوي على n من المجاهيل بحيث ان محددها $|A| \neq 0$ عندئذ يكون للنظام حل وحيد أي أن:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

حيث:

 $|A|$ محدد المعاملات. $|A_1|$ محدد معاملات x_2 مع الحد الثابت. $|A_2|$ محدد معاملات x_1 مع الحد الثابت.Ex:- solve the following equations by using Grammar's Rule:

$$9x + 4y = -6$$

$$3x - 5y = -21$$

الحل //

$$\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -57$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -21 & -5 \end{vmatrix} = 114$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 9 & -6 \\ 3 & -21 \end{vmatrix} = -171$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{114}{-57} = -2$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-171}{-57} = 3$$

$$\therefore (x, y) = (-2, 3)$$

للتحقق من صحة الحل نعوض في المعادلة (x, y) .

Ex:- solve the following equations by using Grammar's Rule:

$$x - y = 1$$

$$x - z = 3$$

$$y + z = 8$$

الحل //

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{12}{2} = 6, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{10}{2} = 5, \quad z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\therefore (x, y, z) = (6, 5, 3)$$

الاختبار البعدي:

$$4x + y + z = 5$$

$$1) \quad 3x + y + 4z = 10$$

$$x + y + z = 2$$

$$Ans: (1, -1, 2)$$

$$x + 2y + z = 4$$

$$2) \quad 3x - 5y + 3z = 1$$

$$2x + 7y - z = 8$$

$$Ans: (1, 1, 1)$$

$$3) \quad 3x - 4y = -15$$

$$2x + 5y = 13$$

$$Ans: (-1, 3)$$

المستجهات والقيم العددية *Vectors & scalars*

الاختبار القبلي:

١. س ١ //

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

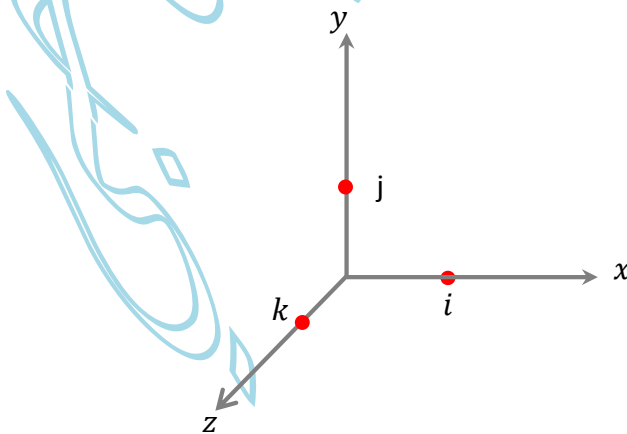
المصفوفتان متساويتان $A = B$

الإجابة الصحيحة: نعم

تسمى الكميات التي لها مقدار عددي وليس لها اتجاه بالقيم العددية (وتكون غير اتجاهية) مثل الطول والزمن ودرجة الحرارة والمسافة ... الخ.

أما الكميات التي يكون لها مقدار عددي واتجاه تسمى بالمتجهات Vectors مثل القوة $\vec{F}$ (Force) والتعجيل $\vec{a}$ (acceleration) والسرعة $\vec{v}$ (velocity).

* لكل متجه ثلاث متغيرات هي (i, j, k) ويكتب $\vec{A} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$



مثلاً:-

$$\vec{A} = i + 2j + 3k \rightarrow a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3$$

العمليات الجبرية على المتجهات

١. الجمع والطرح:-

$$\vec{A} = a_1i + a_2j + a_3k$$

$$\vec{B} = b_1i + b_2j + b_3k$$

$$\vec{A} \mp \vec{B} = (a_1 \mp b_1)i + (a_2 \mp b_2)j + (a_3 \mp b_3)k$$

٢. ضرب المتجه في عدد ثابت:-

$$c\vec{A} = ca_1i + ca_2j + ca_3k$$

٣. طول المتجه:- (دائما تكون القيمة موجبة)

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

٤. متجه الوحدة العمودي $\vec{u}$ لمتجه واحد:-

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{a_1i + a_2j + a_3k}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \frac{a_1}{|\vec{A}|}i + \frac{a_2}{|\vec{A}|}j + \frac{a_3}{|\vec{A}|}k$$

٥. إيجاد قيمة الضرب الديكارتي $Cross(X)$:-

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= i(a_2b_3 - a_3b_2) - j(a_1b_3 - a_3b_1) + k(a_1b_2 - a_2b_1)$$

٦. إيجاد قيمة متجه الوحدة العمودي $\vec{u}$ بين متجهين $\vec{u}(\vec{A}, \vec{B})$:-

$$\vec{u}(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

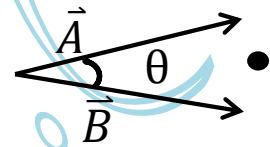
٧. لاستخراج الزاوية θ حسب قانون الضرب الاتجاهي:-

$$\theta(\vec{A}, \vec{B})$$

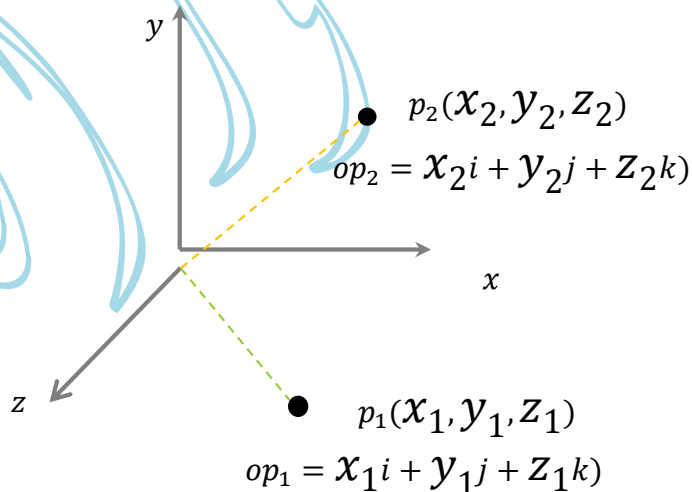
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \sin \theta$$

٨. الضرب العددي Dot وإيجاد الزاوية θ بواسطة $\cos$:-

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \cos \theta$$



* إيجاد المتجه بين نقطتين $p_1 p_2 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$



Ex:- $\vec{A} = 2i + 3j + 4k$, $\vec{B} = i + j + k$

Find 1) $\vec{A} + \vec{B}$ 2) $\vec{A} - \vec{B}$ 3) $3\vec{B}$, $5\vec{A}$ 4) $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$

5) $\vec{u}(A)$, $\vec{u}(B)$ 6) $\vec{A} \times \vec{B}$ 7) $|\vec{A} \times \vec{B}|$ 8) $\vec{u}(\vec{A}, \vec{B})$

9) $\theta(\vec{A}, \vec{B})$

10) $\vec{A} \cdot \vec{B}$

Sol:-

1) $\vec{A} + \vec{B} = 3i + 4j + 5k$

2) $\vec{A} - \vec{B} = i + 2j + 3k$

3) $3\vec{B} = 3i + 3j + 3k$, $5\vec{A} = 10i + 15j + 20k$

4) $|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$, $|\vec{B}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

5) $\vec{u}(\vec{A}) = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2i+3j+4k}{\sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}i + \frac{3}{\sqrt{29}}j + \frac{4}{\sqrt{29}}k$

$$\vec{u}(\vec{B}) = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$$

6) $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -i + 2j - k$

7) $|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

$$\vec{u}(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{-i+2j-k}{\sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{6}}i + \frac{2}{\sqrt{6}}j + \frac{-1}{\sqrt{6}}k$$

9) $\theta(\vec{A}, \vec{B}) \rightarrow |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \sin \theta$

$$\sqrt{6} = \sqrt{29} \times \sqrt{3} \sin \theta$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29}\sqrt{3}} = \sin \theta$$

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{29}\sqrt{3}} = \sin \theta \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{29}} = \sin \theta \rightarrow 0.2626 = \sin \theta$$

$$\theta = \sin^{-1}(0.2626)$$

$$\theta = 15.22^\circ$$

$$10) \vec{A} \cdot \vec{B} = (2 \times 1) + (3 \times 1) + (4 \times 1) = 9$$

$$9 = \sqrt{29}\sqrt{3} \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{9}{\sqrt{29}\sqrt{3}} \rightarrow \theta = 15.22^\circ$$

* إذا كان المتجهين $\vec{A}, \vec{B}$ متعامدين فإن الزاوية تكون 90° وتكون فيه $\cos 90^\circ = 0$.

الاختبار البعدي:

$$\vec{A} = 2i + 3j + 4k, \quad \vec{B} = i + j + k \quad \text{س ١١}$$

Find 1) $\vec{A} + \vec{B}$ 2) $\vec{A} - \vec{B}$ 3) $3\vec{B}, 5\vec{A}$

الإجابة 17,18 p:

الضرب النقطي *Dot product*

الاختبار القبلي:

$$\therefore \vec{A} = 2i + 3j + 4k, \quad \vec{B} = i + j + k$$

Find 1) $|\vec{A}|, |\vec{B}|$ 2) $\vec{u}(A), \vec{u}(B)$ 3) $\vec{A} \times \vec{B}$ p: 17,18

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \cos \theta$$

ملاحظة// إذا كان المتجه $\vec{A}$ موازيا للمتجه $\vec{B}$ أي يكون نفس الاتجاه فإن الزاوية تساوي صفر.

حساب الضرب النقطي

$$\vec{A} = a_1i + a_2j + a_3k$$

$$\vec{B} = b_1i + b_2j + b_3k$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (a_1i + a_2j + a_3k) \cdot (b_1i + b_2j + b_3k)$$

$$\begin{aligned} &= a_1i(b_1i + b_2j + b_3k) + a_2j(b_1i + b_2j + b_3k) + a_3k(b_1i + b_2j + b_3k) \\ &= a_1b_1(i \cdot i) + a_1b_2(j \cdot i) + a_1b_3(k \cdot i) + a_2b_1(i \cdot j) + a_2b_2(j \cdot j) + \\ &a_2b_3(k \cdot j) + a_3b_1(i \cdot k) + a_3b_2(j \cdot k) + a_3b_3(k \cdot k) \end{aligned}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

For perpendicular unit vectors (i, j, k)

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0 \quad \dots (1)$$

Since $\left[i \cdot j = |i| \cdot |j| \cos \frac{\pi}{2} = 0 \right]$ بسبب تعامد المحاور على بعضها (الزاوية قائمة)

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \quad \dots (1)$$

Since $\left[i \cdot i = |i| \cdot |i| \cos 0 = 1 \right]$ لعدم وجود زاوية للمحور مع نفسه (الزاوية تساوي صفر)

Ex:- 1) find the angle between $\vec{A} = 2i + 2j - k$
 $\vec{B} = 6i - 3j + 2k$

2) what is the value of a makes the two vectors $\vec{A} = ai - 2j + k$
 $\vec{B} = 2ai + aj - 4k$ orthogonal?

Sol:-

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \cos \theta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2 \times 6) + (2 \times -3) + (-1 \times 2) = 4$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 2^2} = 7$$

$$4 = 3 \times 7 \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{4}{21} \rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{4}{21} \rightarrow \theta \cong 79^\circ$$

٢. المتجهين متعامدين إذن $\theta = 90^\circ$ وبالتالي فإن $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

$$0 = (a \times 2a) + (-2 \times a) + (1 \times -4)$$

$$0 = 2a^2 - 2a - 4$$

$$0 = a^2 - a - 2$$

$$0 = (a + 1)(a - 2)$$

$$a = -1 \quad \text{or} \quad a = 2$$

Ex:- find $\vec{u}$ from the point $p_1(1,0,1)$, to the point $p_2(3,2,0)$

Sol:-

$$p_1 p_2 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$$

$$p_1 p_2 = (3 - 1)i + (2 - 0)j + (0 - 1)k = 2i + 2j - k$$

$$|p_1 p_2| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

$$\vec{u}(p_1 p_2) = \frac{p_1 p_2}{|p_1 p_2|} = \frac{2i + 2j - k}{3} = \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{1}{3}k$$

الاختبار البعدي:

If $\vec{A} = 2i + j - 3k$ and $\vec{B} = i - 2j + k$ find the vector who is length 5 and column on $\vec{A}$, $\vec{B}$.

المسقاط Projection

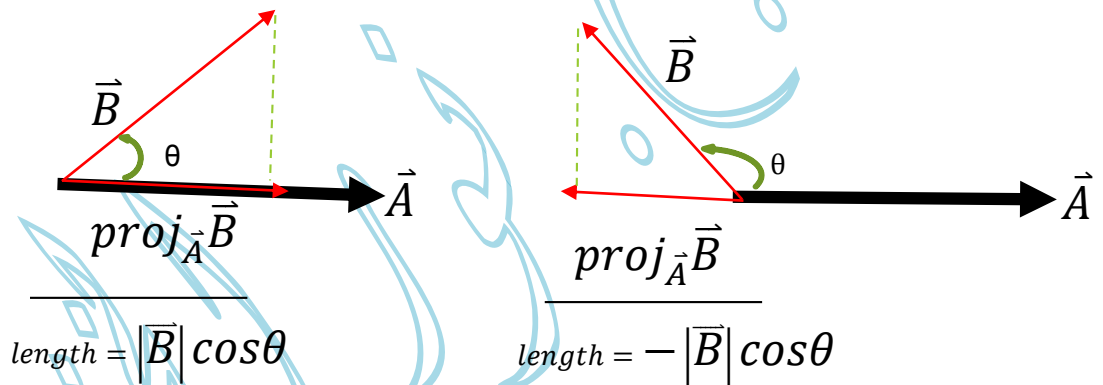
الاختبار القبلي:

find $\vec{u}$ from the point $p_1(1,0,1)$, to the point $p_2(3,2,0)$ $p: 20$

ليكن كل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$ متجهين فان مسقط $\vec{B}$ على المتجه $\vec{A}$ يرمز له بالرمز $(proj_{\vec{A}} \vec{B})$

$$proj_{\vec{A}} \vec{B} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|^2} \vec{A}, \quad |\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$$

ملاحظة ١ // اذا كانت الزاوية θ بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ كما موضح في الشكل a فان طول مسقط المتجه $\vec{B}$ على $\vec{A}$ هو $[\vec{B} \cos \theta]$ بينما في الشكل b طول مسقط المتجه هو $[-|\vec{B}| \cos \theta]$.



ملاحظة ٢ // المركب العددي (scalar component) لـ $\vec{B}$ باتجاه $\vec{A}$ يمكن ايجاده من

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \cos \theta$$

$$|\vec{B}| \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|} = \vec{B} \cdot \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

Ex:- find the vector projection of the vector $\vec{B} = 6i + 3j + 2k$ onto the vector

$\vec{A} = i - 2j - 2k$, and the scalar component of $\vec{B}$ along $\vec{A}$.

Sol:-

$$proj_{\vec{A}} \vec{B} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|^2} \vec{A} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \vec{A}$$

$$= \frac{(1 \times 6) + (-2 \times 3) + (-2 \times 2)}{1+4+4} \times (i - 2j - 2k) = \frac{-4}{9} (i - 2j - 2k)$$

$$|\vec{B}| \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}|} = \frac{-4}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{-4}{\sqrt{9}} = \frac{-4}{3}$$

الاختبار البعدي:

١. جد زاوية المثلث $\hat{A}BC$ الذي رؤوسه $A(1,0,1)$ و $B(2,-1,1)$ و $C(-2,1,0)$.

٢. هل ان $\vec{A} // \vec{B}$ او $\vec{A} \perp \vec{B}$ حيث ان: $\vec{A} = 3i + 9j + 6k$ و $\vec{B} = i + 3j + 2k$

اللوغاريتم (Log)

الاختبار القبلي:

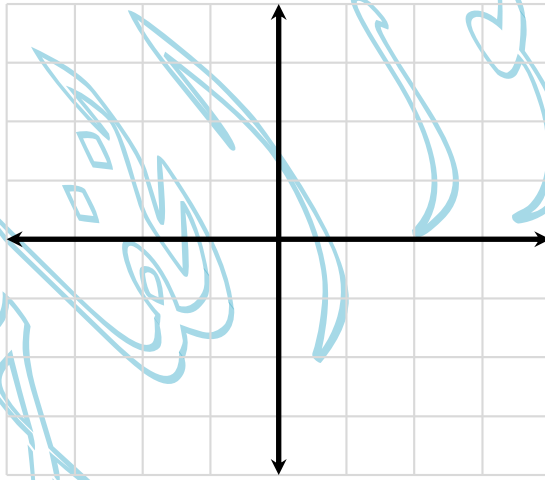
$$\vec{A} = 2i + 3j + 4k, \quad \vec{B} = i + j + k$$

Find $\theta(\vec{A}, \vec{B})$

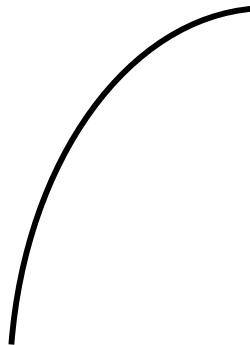
اللوغاريتم:- هو الدالة العكسية للدالة الأسية ويرمز له $y = \log_a x$.

حيث ان الدالة الأسية هي $x = a^y$ ويمكن تحويلها الى الصيغة اللوغاريتمية $y = \log_a x$ وان

$$\forall y \in R, x \in R^{++}, a > 0, a \neq 1$$



رسم دالة $y = \log_a x$



Ex:- Writ the following in logarithmic form:

$$5^3 = 125$$

$$3^2 = 9$$

$$64 = 8^2$$

$$2^6 = 64$$

$$32^{1/5} = 2$$

Sol:

$$5^3 = 125 \Rightarrow \log_5 125 = 3$$

$$3^2 = 9 \Rightarrow \log_3 9 = 2$$

$$64 = 8^2 \Rightarrow \log_8 64 = 2$$

$$2^6 = 64 \Rightarrow \log_2 64 = 6$$

$$32^{1/5} = 2 \Rightarrow \log_{32} 2 = \frac{1}{5}$$

خواص الدالة اللوغاريتمية:-

١. ليس للعدد السالب لوغاريتم.

$$2. \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$3. \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$4. \log_a x^n = n \log_a x, \forall n \in R$$

$$5. \log_a a = 1, \log_a 1 = 0$$

$$6. \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x, \forall n \neq 0 \in R$$

مغالطات قواعد اللوغاريتم:

$$1. \log_a(xy) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

$$2. \log_a(x/y) \neq \log_a x / \log_a y$$

$$4. \log_a x^n \neq \left(\log_a x\right)^n$$

ملاحظة // اذا كان $\log x$ بدون أساس فهذا يعني ان أساسه يساوي 10.

Ex:- calculate the following:

$$1) \log_4 2 + \log_4 32$$

$$= \log_4(2 \times 32) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3 \log_4 4 = 3 \times 1 = 3$$

$$2) \log_2 80 - \log_2 5$$

$$= \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \log_2 2 = 4 \times 1 = 4$$

$$3) -\frac{1}{3} \log 8$$

$$= \log 8^{-\frac{1}{3}} = \log \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \log \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \log \frac{1}{2}$$

اللوغاريتم العشري:-

هو اللوغاريتم الذي يكون أساسه يساوي 10 وهو لا يكتب أي ان $\log_{10} x = \log x$

$$\log 10 = 1$$

مثلا:-

$$\log 100 = 2$$

اللوغاريتم الطبيعي:-

هو اللوغاريتم الذي أساسه عدد ثابت نرمز له e حيث ان $e=2.7$ ويرمز للوغاريتم الطبيعي بالرمز $\ln x$ ، حيث ان $\log_e x = \ln x$.

$$\log_{10} x = \frac{\log x}{\log a} \quad \text{او} \quad \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{قاعدة تبديل الأساس:-}$$

ملاحظة // تستخدم هذه القاعدة لحل المعادلات التي تحتوي على لوغاريتمات مختلفة الاساسات.

حل المعادلات اللوغاريتمية:-

Ex:- solve the following:

$$1) \log_2(x + 2) = 5$$

$$x + 2 = 2^5 \Rightarrow x + 2 = 32 \Rightarrow x = 30$$

$$2) \log_2(25 - x) = 3$$

$$25 - x = 2^3 \Rightarrow 25 - x = 8 \Rightarrow x = 17$$

$$3) 4 + 3 \log(2x) = 16 \quad H.W$$

الاختبار البعدي:

$$\text{prove that } \log(x + 2) + \log(x - 1) = 1$$

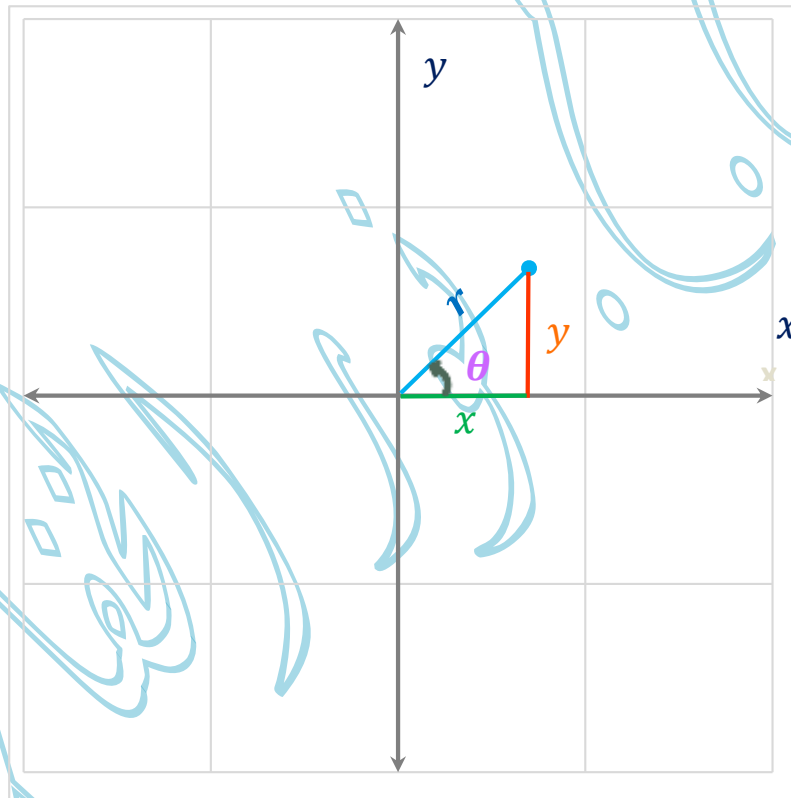
Trigonometric function

الدوال المثلثية

الاختبار القبلي:

calculate the following: $\log_4 2 + \log_4 32$

p:20



$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{1} \Rightarrow \sin \theta = y$$

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{1} \Rightarrow \cos \theta = x$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x}$$

جدول النسب المثلثية للزوايا الخاصة

	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$
$\sin$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1

	0°	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	$180^\circ = \pi$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	$360^\circ = 2\pi$
$\sin$	0	1	0	-1	0
$\cos$	1	0	-1	0	1
$\tan$	0	∞	0	∞	0

جداول دائرية أخرى

 $\csc \theta$ هي مقلوب
الدالة الدائرية $\sin \theta$ $\sec \theta$ هي مقلوب
الدالة الدائرية $\cos \theta$ $\cot \theta$ هي مقلوب
الدالة الدائرية $\tan \theta$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

او

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

قوانين مهمة جدا

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

قوانين ضعف الزاوية

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

(بشرط المقام لا يساوي صفر)

قوانين نصف الزاوية

$$\sin(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

$$\cos(x) = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

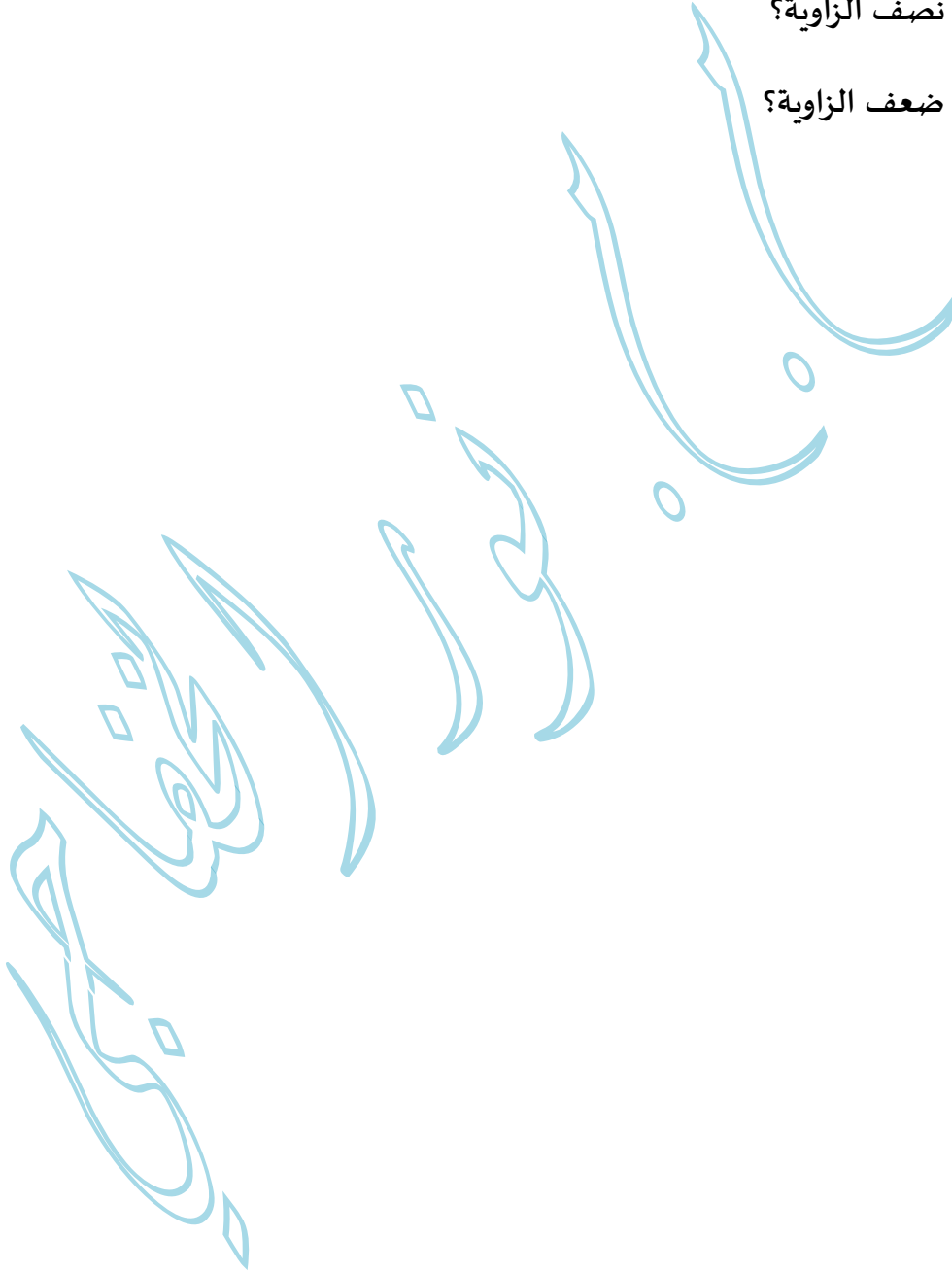
١. اكتب قانون القاعدة الذهبية؟

٢. اكتب جدول النسب المثلثية؟

٣. اكتب قوانين نصف الزاوية؟

٤. اكتب قوانين ضعف الزاوية؟

P:27,28



الغاية Limit

الاختبار القبلي:

calculate the following: $\log_2 80 - \log_2 5$ p: 24

إذا كانت x تقترب من a وكانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من c نسي c هي غاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب من a .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

أي ان:

مبرهنات الغاية:-

١. غاية الثابت تساوي الثابت نفسه $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

٢. غاية الدالة متعددة الحدود (كثيرة الحدود تساوي التعويض) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

٣. غاية الدالة الكسرية:-

الحالة الأولى/ إذا كان تعويض نقطة الاقتراب يجعل المقام لا يساوي صفر فان الغاية هي تعويض مباشر.

الحالة الثانية/ إذا كان التعويض يجعل المقام يساوي صفر يجب تبسيط الكسر بإحدى طرق التحليل (فرق بين مربعين- مجموع او فرق مكعبين- التجربة- العامل المشترك) حسب السؤال ثم التعويض.

٤. غاية الدالة الجذرية:-

الحالة الأولى/ الغاية تساوي التعويض المباشر اذا كان تعويض نقطة الاقتراب يجعل داخل الجذر اكبر او يساوي من الصفر.

الحالة الثانية/ اذا كان التعويض يجعل المقدار داخل الجذر اصغر من الصفر (سالب) يجب تبسيط المقادير ثم التعويض.

Ex:- find

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 + 6x + 8)$$

$$= 3(-1)^2 + 6(-1) + 8 = 5$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 16) = 2(2) + 16 = 20$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x + 6} = \sqrt{3(1) + 6} = 3$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{2x^2 + 8x + 10} = \sqrt{2(-1)^2 + 8(-1) + 10} = 2$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 1}{x + 1} = \frac{1^4 + 1}{1 + 1} = 2$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3}{x + 3} = \frac{3^2 + 3}{3 + 3} = 2$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

التعويض المباشر يجعل المقام يساوي صفر

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

8. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2-25}{x+5}$ التعويض المباشر يجعل المقام يساوي صفر

$$= \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x-5)(x+5)}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5} (x-5) = -10$$

9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x-2}$ التعويض المباشر يجعل المقام يساوي صفر

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(x^2+4) = 32$$

10. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+27}{(x+3)(x+2)}$ التعويض المباشر يجعل المقام يساوي صفر

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{(x+3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2-3x+9)}{(x+2)} = -27$$

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ التعويض المباشر يجعل المقام يساوي صفر

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$ التعويض المباشر يجعل المقام يساوي صفر

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1)(x + 1) = 4$$

غاية الدوال المثلثية:-

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 1$$

Ex:- find:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{(2x - 1)} = 1 \times \frac{1}{(2(0) - 1)} = -1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \frac{5}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{3}$$

الاختبار البعدي:

find

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 + 6x + 8)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 16)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{3x + 6}$$

المشتقة Derivatives

الاختبار القبلي:

find: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x}$ $p: 33$

إذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير x فان رمز المشتقة لها هو $(y', \frac{dy}{dx})$ ورمز المشتقة الثانية هو $(y'', \frac{d^2y}{dx^2})$.

قواعد الاشتقاق

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$$

القاعدة الأولى: مشتقة الثابت = صفر.

Ex:- find the derivatives of each of the following:

1) $f(x) = 5$, 2) $f(x) = \sqrt{10}$, 3) $f(x) = \frac{5}{4}$, 4) $f(x) = -2$

1) $f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$

// الحل

2) $f(x) = \sqrt{10} \Rightarrow f'(x) = 0$

3) $f(x) = \frac{5}{4} \Rightarrow f'(x) = 0$

4) $f(x) = -2 \Rightarrow f'(x) = 0$

ملاحظة // مشتقة x تساوي واحد

القاعدة الثانية: مشتقة x مرفوعة للقوى n = الاس n مضروب في x مرفوعة للقوى $n - 1$

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Ex:- find the derivatives of each of the following:

1) $f(x) = x^4,$

2) $f(x) = x^7,$

3) $f(x) = x^{-5},$

4) $f(x) = x^{-2},$

5) $f(x) = x^{3/5}$

6) $f(x) = x^{3/2},$

7) $f(x) = x^{-5/4},$

8) $f(x) = \frac{1}{x^5},$

9) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

1) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$

2) $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6$

3) $f(x) = x^{-5} \Rightarrow f'(x) = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$

4) $f(x) = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$

5) $f(x) = x^{\frac{3}{5}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}$

$$f'(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{5x^{2/5}}$$

6) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

7) $f(x) = x^{\frac{-5}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-5}{4}x^{\frac{-9}{4}}$

8) $f(x) = \frac{1}{x^5} = f(x) = x^{-5} \Rightarrow f'(x) = -5x^{-6} = \frac{-5}{x^6}$

9) $f(x) = \frac{1}{x^3} = f(x) = x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$

طريقة تحويل الجذر الى اس:-

المؤثر m الاس n الاساس a $= (a)^{n/m}$

ملاحظة// لايجاد مشتقة دالة جذرية نحول الدالة الاسية نجد المشتقة ثم نرجع الدالة الى اصلها (دالة جذرية).

Ex:- find the derivatives of each of the following:

$$1) y = \sqrt[3]{x}$$

$$2) y = \sqrt{x^3}$$

$$3) y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$$

$$1) y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{3} x^{\frac{1-3}{3}} = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

القاعدة الثالثة:: مشتقة ثابت مضروب في x مرفوعة للقوى n = الثابت مضروب في الاس n مضروب في x

مرفوعة للقوى $n - 1$

$$f(x) = cx^n \Rightarrow f'(x) = cnx^{n-1}$$

Ex:- find the derivatives of each of the following:

$$1) f(x) = 3x^2,$$

$$2) f(x) = 6x^4,$$

$$3) f(x) = 2x^{-5},$$

$$4) f(x) = -3x^{-2},$$

$$5) f(x) = 2x^{2/7}$$

$$6) f(x) = 4x^{1/2}$$

$$1) f(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x$$

$$2) f(x) = 6x^4 \Rightarrow f'(x) = 24x^3$$

$$3) f(x) = 2x^{-5} \Rightarrow f'(x) = -10x^{-6}$$

$$4) f(x) = -3x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 6x^{-3}$$

$$5) f(x) = 2x^{\frac{2}{7}} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{7}x^{\frac{-5}{7}}$$

$$6) f(x) = 4x^{1/2} \Rightarrow f'(x) = 2x^{-1/2}$$

القاعدة الرابعة: مشتقة حاصل جمع او طرح دالتين = مشتقة الأولى $\pm$ مشتقة الثانية.

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

Ex:- find the derivatives of each of the following:

$$1) y = 4x^2 - 2x + 1,$$

$$2) y = \frac{4}{x^5} - 2\sqrt{x},$$

$$3) y = 10 \left[\frac{x^2}{50} + \frac{x}{9} - \frac{1}{3} \right]$$

$$4) y = \frac{3}{2x^2} + \frac{5x^2}{3} - \frac{7x}{5} - \frac{1}{6}$$

$$1) y = 4x^2 - 2x + 1 \Rightarrow y' = 8x - 2$$

$$2) y = \frac{4}{x^5} - 2\sqrt{x} = 4x^{-5} - 2x^{1/2} \Rightarrow y' = -20x^{-6} - \frac{2}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{-20}{x^6} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$3) y = 10 \left[\frac{x^2}{50} + \frac{x}{9} - \frac{1}{3} \right] \Rightarrow y' = 10 \left[\frac{2x}{50} + \frac{1}{9} \right] = \frac{2x}{5} + \frac{10}{9}$$

$$4) y = \frac{3}{2x^2} + \frac{5x^2}{3} - \frac{7x}{5} - \frac{1}{6} = \frac{3x^{-2}}{2} + \frac{5x^2}{3} - \frac{7x}{5} - \frac{1}{6}$$

$$y' = \frac{-6x^{-3}}{2} + \frac{10x}{3} - \frac{7}{5} = \frac{-3}{x^3} + \frac{10x}{3} - \frac{7}{5}$$

القاعدة الخامسة: مشتقة حاصل ضرب دالتين = الأولى $\times$ مشتقة الثانية + الثانية $\times$ مشتقة الأولى.

$$f(x) = g(x) \times h(x) \Rightarrow f'(x) = g(x) \times h'(x) + h(x)g'(x)$$

Ex:- find the derivatives of each of the following:

$$1) f(x) = (2x)(x^3 + 1),$$

$$2) f(x) = (3 - 2x - x^5)(2x^7 + 5)$$

$$3) f(x) = \sqrt{x}(x + 2)$$

$$1) f(x) = (2x)(x^3 + 1) \Rightarrow f'(x) = (2x)(3x^2) + (x^3 + 1)(2)$$

$$2) f(x) = (3 - 2x - x^5)(2x^7 + 5)$$

$$\Rightarrow f'(x) = (3 - 2x - x^5)(14x^6) + (2x^7 + 5)(-2 - 5x^4)$$

$$3) f(x) = \sqrt{x}(x + 2) \Rightarrow f(x) = x^{1/2}(x + 2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^{1/2}(1) + (x + 2)\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{x} + (x + 2)\left(\frac{1}{2x^{1/2}}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x+2}{2\sqrt{x}}$$

Ex:- find $f'(x)$ when $x = 2$ such that $f(x) = (4 - x)(x^2 + 3)$.

$$f'(x) = (4 - x)(2x) + (x^2 + 3)(-1)$$

$$f'(2) = (4 - 2)(2(2)) + (2^2 + 3)(-1) = (2)(4) + (7)(-1) = 8 - 7 = 1$$

القاعدة السادسة: مشتقة حاصل قسمة دالتين = $\frac{\text{مشتقة المقام} \times \text{البسط} - \text{مشتقة البسط} \times \text{المقام}}{(\text{المقام})^2}$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{h(x) \times g'(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}$$

Ex:- find the derivatives of each of the folloing:

$$1) f(x) = \frac{2x^3}{x+1}, \quad 2) f(x) = \frac{x^2+2}{x^3}. \quad f'(1)$$

$$1) f(x) = \frac{2x^3}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x+1)(6x^2) - (2x^3)(1)}{(x+1)^2} = \frac{6x^3+6x^2-2x^3}{(x+1)^2} = \frac{4x^3-2x^2}{(x+1)^2}$$

$$2) f(x) = \frac{x^2+2}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^3)(2x) - (x^2+2)(3x^2)}{(x^3)^2}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{(1^3)(2(1)) - (1^2+2)(3(1)^2)}{(1^3)^2} = \frac{-7}{1} = -7$$

القاعدة السابعة: مشتقة قوس مرفوع اس n :

$$f(x) = (g(x))^n \Rightarrow f'(x) = n(g(x))^{n-1}(g'(x))$$

Ex:- find the derivatives of each of the folloing:

$$1) f(x) = (x^2 + 2x - 4)^5 \quad 2) f(x) = \sqrt{x^3 + 4} \quad 3) f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^4$$

//الحل

$$1) f(x) = (x^2 + 2x - 4)^5$$

$$\Rightarrow f'(x) = 5(x^2 + 2x - 4)^4(2x + 2) = (10x + 10)(x^2 + 2x - 4)^4$$

$$2) f(x) = \sqrt{x^3 + 4} = (x^3 + 4)^{1/2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 4)^{-1/2}(3x^2) = \frac{3x^2}{2(x^3+4)^{1/2}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{(x^3+4)}}$$

$$3) f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^4 \Rightarrow f'(x) = 4\left(\frac{x}{x+1}\right)^3 \left(\frac{(x+1)(1) - x(1)}{(x+1)^2}\right)$$

$$= 4\left(\frac{x+1-x}{(x+1)^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)^3 = 4\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)^3$$

الاختبار البعدي:

find the derivatives of each of the folloing:

$$1) f(x) = (x^2 + 2x - 4)^5 \quad 2) f(x) = \sqrt{x^3 + 4} \quad 3) f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^4 \quad p:39$$

قاعدة السلسلة:

الاختبار القبلي:

find the derivatives of each of the following:

$$1) f(x) = x^4, \quad 2) f(x) = x^7, \quad 3) f(x) = x^{-5} \quad p:35$$

قاعدة السلسلة

$y = f(n)$ اذا كانت $x = g(n)$ وكانت حيث:- $y = f(n) \Rightarrow \frac{dy}{dn}$ $n = g(x) \Rightarrow \frac{dx}{dn}$ فان:- $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$ عندما تكون المقامات متشابهة نستخدم القسمة (قاعدة السلسلة الثانية).	$y = f(n)$ اذا كانت $n = g(x)$ وكانت حيث:- $y = f(n) \Rightarrow \frac{dy}{dn}$ $n = g(x) \Rightarrow \frac{dn}{dx}$ فان:- $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx}$ عندما تكون المقامات مختلفة نستخدم الضرب (قاعدة السلسلة الاولى).
--	---

Ex:- if $y = 3n^2 + 5$, $n = 4x + 3$ find $\frac{dy}{dx}$

// الحل

$$y = 3n^2 + 5 \Rightarrow \frac{dy}{dn} = 6n$$

$$n = 4x + 3 \Rightarrow \frac{dn}{dx} = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx} = (6n)(4) = 24n$$

$$\frac{dy}{dx} = 24(4x + 3) = 96x + 72$$

$$n = 4x + 3 \text{ نعوض}$$

Ex:- if $y = n^2 + 3n + 2$, $n = 2x + 1$ find $\frac{dy}{dx}$ when $x = 2$:

// الحل

$$y = n^2 + 3n + 2 \Rightarrow \frac{dy}{dn} = 2n + 3$$

$$n = 2x + 1 \Rightarrow \frac{dn}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx} = (2n + 3)(2) = 4n + 6$$

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x + 1) + 6 = 8x + 4 + 6$$

$$\frac{dy}{dx} = 8x + 10$$

$$\frac{dy}{dx} = 8(2) + 10 = 26$$

$$n = 2x + 1 \text{ نعوض}$$

$$x = 2 \text{ نعوض}$$

Ex:- if $y = 2n + 5$, $x = 3n - 4$ find $\frac{dy}{dx}$

// الحل

$$y = 2n + 5 \Rightarrow \frac{dy}{dn} = 2$$

$$x = 3n - 4 \Rightarrow \frac{dx}{dn} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn} = \frac{2}{3}$$

Ex:- if $y = 5n + 4$, $x = 3n + 1$ find $\frac{dy}{dx}$ when $n = 1$:

$$y = 5n + 4 \Rightarrow \frac{dy}{dn} = 5$$

$$x = 3n + 1 \Rightarrow \frac{dx}{dn} = 3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn} = \frac{5}{3}$$

if $y = 3n^2 + 5$, $n = 4x + 3$ find $\frac{dy}{dx}$ p:41

الاختبار البعدي:

محاضرة رقم (6)

مشتقات الدوال المثلثية او الدائرية:-

للحفظ مهم جداً

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$$

$$y = \cot x \Rightarrow y' = -\csc^2 x$$

$$y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x * \tan x$$

$$y = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x * \cot x$$

ملاحظة (1):- عندما نشتق أي دالة مثلثية نضرب في مشتقة الزاوية.

ملاحظة (2):- قواعد حاصل ضرب دالتين او حاصل قسمة دالتين او القوس المرفوع الى اس تنطبق على هذه الدوال.

Examples :-

Find y' for the next function.

$$1) y = \sin 5x \Rightarrow y' = \cos 5x * 5$$

$$y' = 5 * \cos 5x$$

$$2) y = \cos 4x \Rightarrow y' = -\sin 4x * 4$$

$$y' = -4 * \sin 4x$$

$$3) y = \tan x^2 \Rightarrow y' = \sec^2 x^2 * 2x$$

$$y' = 2x * \sec^2 x^2$$

$$4) y = \sin^5(x^3 + 2x - 1) \Rightarrow y' = 5 * \sin^4(x^3 + 2x - 1) * \cos(x^3 + 2x - 1) * (3x^2 + 2)$$

$$y' = (15x^2 + 10) * \sin^4(x^3 + 2x - 1) * \cos(x^3 + 2x - 1)$$

$$5) y = \sin(7x^2 + 4x + 1)$$

$$y' = \cos(7x^2 + 4x + 1) * (14x + 4)$$

$$y' = (14x + 4) * \cos(7x^2 + 4x + 1)$$

$$6) y = \tan^2(x^2 + 3x) \Rightarrow y' = 2 * \tan(x^2 + 3x) * \sec^2(x^2 + 3x) * (2x + 3)$$

$$y' = (4x + 6) * \tan(x^2 + 3x) * \sec^2(x^2 + 3x)$$

$$7) y = \sin \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = \cos \sqrt[3]{x} * \frac{1}{3 * \sqrt[3]{x^2}}$$

$$8) y = \sin 3x * \cos 3x$$

$$y' = \sin 3x * [-\sin 3x * 3] + \cos 3x * [\cos 3x * 3]$$

$$y' = -3 \sin^2 3x + 3 \cos^2 3x$$

$$9) y = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$$

$$y' = \cos x - \frac{1}{\cancel{3}} * \cancel{3} * \sin^2 x * \cos x * (1)$$

$$y' = \cos x - \sin^2 x * \cos x \Rightarrow y' = \cos x [1 - \sin^2 x]$$

$$\text{where : } [\sin^2 x + \cos^2 x = 1] \Rightarrow [\cos^2 x = 1 - \sin^2 x] \quad (\text{law})$$

$$y' = \cos x * \cos^2 x \Rightarrow y' = \cos^3 x$$

$$10) y = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x$$

$$y' = \sec^2 x + \frac{1}{\cancel{3}} * \cancel{3} * \tan^2 x * \sec^2 x * (1)$$

$$y' = \sec^2 x + \tan^2 x * \sec^2 x$$

$$y' = \sec^2 x [1 + \tan^2 x] \Rightarrow y' = \sec^2 x * \sec^2 x$$

$$y' = \sec^4 x$$

مشتقات الدوال اللوغاريتمية:-

تعريفها:-

$$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{1}{u} * u'$$

$$y = \log_b u \Rightarrow y' = \frac{1}{\ln b u} * u'$$

امثلة جد $\frac{dy}{dx} = y'$ اذا كان:-

$$1) y = \ln (x^2 + 3) \Rightarrow y' = \frac{1}{(x^2 + 3)} * 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{(x^2 + 3)}$$

$$2) y = \ln (\tan x) \Rightarrow y' = \frac{1}{(\tan x)} * \sec^2 x \Rightarrow y' = \frac{\sec^2 x}{(\tan x)}$$

$$3) y = \log_3 \sin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\ln 3 \sin x} * \cos x \Rightarrow y' = \frac{1}{\ln 3} \cot x$$

$$4) y = \ln (\sin x * \cos x) \Rightarrow y = \ln \sin x + \ln \cos x$$

$$y' = \frac{1}{\sin x} * \cos x + \frac{1}{\cos x} * -\sin x \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y' = \cot x - \tan x$$

$$5) y = \ln \sqrt[3]{4x^2 + 5x} \Rightarrow y = \ln (4x^2 + 5x)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \ln (4x^2 + 5x)$$

$$y' = \frac{1}{3} * \frac{1}{(4x^2 + 5x)} * 8x + 5 \Rightarrow y' = \frac{8x + 5}{3(4x^2 + 5x)}$$

مشتقات الدوال الاسية:-

تعريفها :- هي نفسها ضرب مشتقة الاس.

$$y = e^u \Rightarrow y' = e^u * u'$$

Examples:-

$$1) y = e^x \Rightarrow y' = e^x * 1 \Rightarrow y' = e^x$$

$$2) y = e^{5x} \Rightarrow y' = e^{5x} * 5 \Rightarrow y' = 5 * e^{5x}$$

$$3) y = e^{\sqrt{x}} \Rightarrow y = e^{x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow y' = e^{x^{\frac{1}{2}}} * \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow$$

$$y' = e^{x^{\frac{1}{2}}} * \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow y' = e^{\sqrt{x}} * \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4) y = e^{x \ln x} \Rightarrow y' = e^{x \ln x} * (x * \frac{1}{x} * 1 + \ln x * 1) \Rightarrow y' = (\frac{1}{x} + \ln x) e^{x \ln x}$$

$$5) \sec(e^{4x}) \Rightarrow y' = \sec(e^{4x}) \tan(e^{4x}) * 4 \Rightarrow y' = 4 * \sec(e^{4x}) \tan(e^{4x})$$

ملاحظات مهمة جدا على قواعد (ln)

$$1) y = \ln \frac{a}{b} \Rightarrow y = \ln a - \ln b$$

$$2) y = \ln (a.b) \Rightarrow y = \ln a + \ln b$$

$$3) y = \ln x^n \Rightarrow y = n \ln x$$

محاضرة رقم (7)

التطبيقات الفيزيائية على المشتقة:-

Physical Applications on Derivatives:-

1- displacement:- الازاحة $p(t)$ [m,cm,km]

distance:- المسافة

2- velocity or speed السرعة $v(t)$ [m/s or m/min or km/h]

3- acceleration التعجيل $a(t)$ [m / s^2 or m / min^2 or km / h^2]

ملاحظة مهمة جدا:- مشتقة الازاحة تعطي سرعة ومشتقة السرعة تعطي التعجيل:-

السرعة :- مشتقة الازاحة .

التعجيل :- مشتقة للسرعة .

Example (1):- A moving body on a straight line according to the

rule $p(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t - 5$

Where the displacement p(t) is in meters;

Time(t) in seconds;

Find speed v(t)? when acceleration a(t) equals zero

Solution :-

$$v(t) = p(t)'$$

$$p(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t - 5$$

$$v(t) = \frac{1}{\cancel{3}} * \cancel{3}t^2 - 4t + 3$$

$$v(t) = t^2 - 4t + 3 \quad (\text{speed})$$

$$a(t) = v(t)'$$

$$v(t) = t^2 - 4t + 3$$

$$a(t) = 2t - 4$$

$$\therefore a(t) = 0$$

$$2t - 4 = 0 \Rightarrow 2t = 4 \Rightarrow t = \frac{4}{2} = 2$$

$$t = 2 \text{ sec}$$

$$v(t) = t^2 - 4t + 3$$

$$v(2) = (2)^2 - 4(2) + 3$$

$$v(2) = 4 - 8 + 3$$

$$v(2) = 4 - 5 = -1 \text{ m / sec}$$

Example (2):- Let $V(t)$ speed A moving body on line straight according to the rule $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$

Find 1- the velocity at $t=2\text{sec}$.

2- the velocity at acceleration equal zero.

Solution:-

$$v(t) = 3t^2 - 6t + 9$$

$$\text{when : } (t = 2)$$

$$v(2) = 3(2)^2 - 6(2) + 9$$

$$v(2) = \cancel{12} - \cancel{12} + 9 = 9 \text{ cm / sec}$$

$$a(t) = v(t)'$$

$$v(t) = 3t^2 - 6t + 9$$

$$a(t) = 6t - 6$$

$$a(t) = 0$$

$$6t - 6 = 0 \Rightarrow 6t = 6 \Rightarrow t = 1$$

$$v(t) = 3t^2 - 6t + 9$$

$$v(1) = 3(1)^2 - 6(1) + 9$$

$$= 3 - 6 + 9$$

$$= 3 + 3 = 6 \text{ cm / sec}$$

Example (3):- Let $V(t)$ cm/sec speed a moving body on line straight According to the rule

$$v(t) = t^3 - t^2 + 5$$

Find the velocity? when the acceleration equal $8 \text{ cm} / \text{sec}^2$

Solution:-

$$v(t) = t^3 - t^2 + 5 \quad (\text{velocity})$$

$$a(t) = v(t)'$$

$$a(t) = 3t^2 - 2t$$

$$a(t) = 8$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 2t = 8$$

$$\Rightarrow 3t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (3t + 4)(t - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (3t + 4) = 0 \Rightarrow 3t = -4 \Rightarrow t = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow (t - 2) = 0 \Rightarrow t = 2$$

$$v(2) = t^3 - t^2 + 5$$

$$v(2) = (2)^3 - (2)^2 + 5$$

$$= 8 - 4 + 5$$

$$= 9 \text{ cm} / \text{sec}$$

التكامل integration

الاختبار القبلي:

if $y = 5n + 4$, $x = 3n + 1$ find $\frac{dy}{dx}$ when $n = 1$: p: 42

هو عملية عكسية لعملية الاشتقاق، وهناك نوعان من التكامل:



إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق بحيث أن $f'(x)$ هي مشتقتها فإن العملية العكسية لها تسمى التكامل ويرمز لها بالرمز $\int$.

التكامل غير المحدد:-

$$\int f'(x) dx = f(x) + c$$

قواعد التكامل:-

$$1) \int dx = x + c$$

$$2) \int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$3) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$4) \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln x + c$$

$$5) \int e^x dx = e^x + c$$

$$6) \int [u(x)]^n u'(x) dx = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

Ex:- find integration:-

$$1) \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$2) \int 3x^5 dx = \frac{3x^6}{6} + c = \frac{x^6}{2} + c$$

$$3) \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/3} dx = \frac{3}{4} x^{4/3} + c$$

$$4) \int (2x^2 + 5x + 3) dx = \frac{2}{3} x^3 + \frac{5}{2} x^2 + 3x + c$$

$$\begin{aligned} 5) \int (2\sqrt{x} - 3x\sqrt{x}) dx &= \int (2x^{1/2} - 3xx^{1/2}) dx \\ &= \int (2x^{1/2} - 3x^{3/2}) dx = 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} - 3 \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} + c \\ &= \frac{4}{3} x^{3/2} - \frac{6}{5} x^{5/2} + c \end{aligned}$$

$$6) \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -x^{-1} + c = \frac{-1}{x} + c$$

$$\begin{aligned} 7) \int (3x + 2)^5 dx &= \frac{1}{3} \int 3(3x + 2)^5 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} (3x + 2)^6 + c \\ &= \frac{1}{18} (3x + 2)^6 + c \end{aligned}$$

$$8) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2(x^3+1)^{-1/2} dx = \left(\frac{1}{3}\right)(2)(x^3+1)^{1/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + c$$

$$9) \int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2} dx = \int (x+5-\frac{4}{x^2}) dx = \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x} + c$$

$$10) \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + c$$

$$11) \int \frac{x^2}{1-2x^3} dx = \frac{-1}{6} \int \frac{-6}{1-2x^3} dx = \frac{-1}{6} \ln|1-2x^3| + c$$

$$12) \int x e^{3x^2} dx = \frac{1}{6} \int 6x e^{3x^2} dx = e^{3x^2} + c$$

الاختبار البعدي:

find integration:-

$$1) \int x e^{3x^2} dx \quad 2) \int 3x^5 dx \quad 3) \int \frac{1}{2x+1} dx \quad p: 52$$

تكمّل الدوال المثلثية:-

الاختبار القبلي:

find integration:-

$$1) \int x^2 dx \quad 2) \int \frac{x^2}{1-2x^3} dx \quad 3) \int \sqrt[3]{x} dx \quad p: 53$$

$$1) \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$2) \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$3) \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$4) \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$

$$5) \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$$

$$6) \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$

Ex:- find integration

$$1) \int \sin 5x \, dx = \frac{1}{5} \int 5 \sin 5x \, dx = \frac{-1}{5} \cos 5x + c$$

$$2) \int x^2 \cos x^3 \, dx = \frac{1}{3} \int 3 \cos x^3 \, dx = \frac{1}{3} \sin x^3 + c$$

$$3) \int \sin^2 x \cos x \, dx = \int (\sin x)^2 \cos x \, dx = \frac{1}{3} (\sin x)^3 + c$$

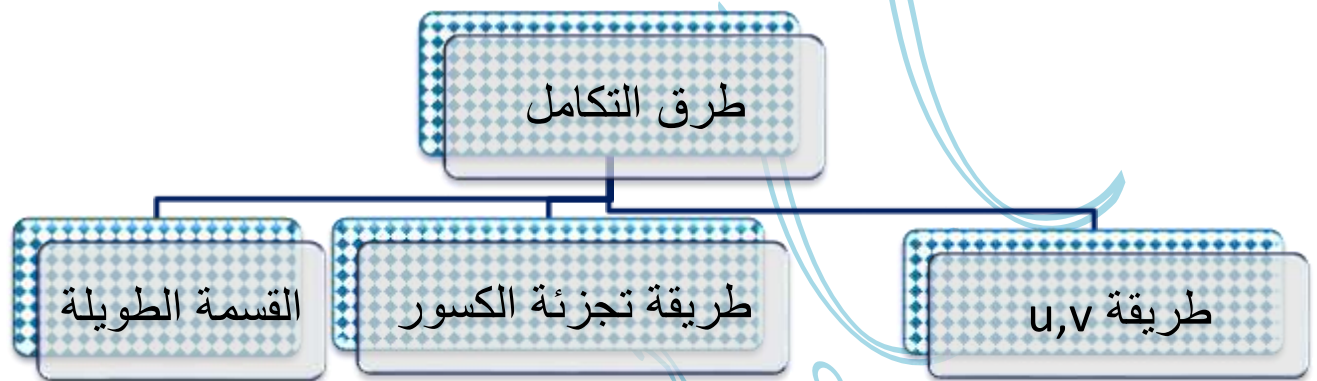
$$4) \int \tan 5x \sec 5x \, dx = \frac{1}{5} \int 5 \tan 5x \sec 5x \, dx \\ = \frac{1}{5} \sec 5x + c$$

التكامل المحدد:-

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

Ex:- find integration

$$1) \int_0^5 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 = \frac{5^2 - 0^2}{2} = \frac{25}{2}$$



$$2) \int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{3^4 - 1^4}{4} = \frac{81 - 1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

أولاً:- طريقة u,v:- تستخدم عندما يكون السؤال عبارة عن حاصل ضرب مقدارين ولا يمكن إجراء عملية التكامل لهما بشكل مباشر.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

١. نفرض المقدار الأول من التكامل يساوي u ونشتقه.

٢. نفرض المقدار المتبقي مع dx يساوي dv ونكامله.

٣. نعوض ١ و ٢ في القانون اعلاه ونجري عملية التكامل.

Ex:- find integration

$$1) \int x \sin x \, dx$$

$$\text{let } u = x \Rightarrow du = dx$$

$$\text{let } dv = \sin x \, dx \Rightarrow \int dv = \int \sin x \, dx \Rightarrow v = -\cos x$$

الان نعوض الفرضيتين في القانون: $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + c$$

$$2) \int x e^x \, dx$$

$$\text{let } u = x \Rightarrow du = dx$$

$$\text{let } dv = e^x \, dx \Rightarrow \int dv = \int e^x \, dx \Rightarrow v = e^x$$

الان نعوض الفرضيتين في القانون: $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int x e^x \, dx = x(e^x) - \int e^x \, dx$$

$$\int x e^x \, dx = x e^x - e^x + c$$

$$3) \int x \ln x \, dx = \int \ln x \, x \, dx$$

$$\text{let } u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$\text{let } dv = x \, dx \Rightarrow \int dv = \int x \, dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

الان نعوض الفرضيتين في القانون: $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$$\int \ln x \, x \, dx = \ln x \left(\frac{x^2}{2} \right) - \int \left(\frac{x^2}{2} \right) \frac{1}{x} dx$$

$$\int \ln x \, x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx$$

$$\int \ln x \, x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right) + c$$

$$\int \ln x \, x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

ثانياً:- طريقة تجزئة الكسور:- تستخدم عندما تكون درجة البسط اقل من درجة المقام، وان

مشتقة المقام غير موجودة في البسط ولا يمكن توفيرها.

١. اذا لم يكون المقام عبارة عن حاصل ضرب اقواس فيجب ان يحلل (فرق بين مربعين - تجربة - فرق او مجموع مكعبين).

٢. نجزي الكسور ثم نجد المجاهيل.

٣. نعوض المجاهيل في السؤال ثم نجري عملية التكامل.

Ex:- find integration

$$1) \int \frac{1}{x^2 - 9} dx = \int \frac{1}{(x+3)(x-3)} dx$$

$$= \int \left(\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} \right) dx$$

نحلل المقام

نجزئ المقام

نجد المجاهيل A, B

$$\frac{1}{(x+3)(x-3)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x+3)}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{Ax - 3A + Bx + 3B}{(x+3)(x-3)} = \frac{(A+B)x + (-3A + 3B)}{(x+3)(x-3)}$$

$$\Rightarrow A + B = 0, \quad -3A + 3B = 1$$

$$\Rightarrow A = -B \dots \dots \dots (1), \quad -3A + 3B = 1 \dots \dots \dots (2)$$

نعوض ١ في ٢:

$$\Rightarrow -3(-B) + 3B = 1 \Rightarrow 3B + 3B = 1 \Rightarrow 6B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{6}$$

$$A = -B \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$$

نعوض $B = \frac{1}{6}$ في ١ لإيجاد A:

$$= \int \left(\frac{-\frac{1}{6}}{x+3} + \frac{\frac{1}{6}}{x-3} \right) dx = \frac{-1}{6} \int \frac{1}{x+3} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-3} dx$$

$$= \frac{-1}{6} \ln|x+3| + \frac{1}{6} \ln|x-3| + c$$

$$2) \int \frac{1}{x^2 - 4} dx = \int \frac{1}{(x+2)(x-2)} dx$$

$$= \int \left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \right) dx$$

نجد المجاهيل A, B

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{Ax - 2A + Bx + 2B}{(x+2)(x-2)} = \frac{(A+B)x + (-2A + 2B)}{(x+2)(x-2)}$$

$$\Rightarrow A + B = 0, \quad -2A + 2B = 1$$

$$\Rightarrow A = -B \dots \dots \dots (1), \quad -2A + 2B = 1 \dots \dots \dots (2)$$

نعوض ١ في ٢:

$$\Rightarrow -2(-B) + 2B = 1 \Rightarrow 2B + 2B = 1 \Rightarrow 4B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4}$$

$$A = -B \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

نعوض $B = \frac{1}{4}$ في ١ لإيجاد A:

$$= \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{x+2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2} \right) dx = \frac{-1}{4} \int \frac{1}{x+2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-2} dx$$

$$= \frac{-1}{4} \ln|x+2| + \frac{1}{4} \ln|x-2| + c$$

ثالثاً:- القسمة الطويلة:- تستخدم عندما تكون درجة البسط اعلى من درجة المقام.

Ex:- find integration $\int \frac{x^3 - 5x + 1}{x + 2} dx$

القسمة الطويلة:

$$\frac{x^3 - 5x + 1}{x + 2} = x^2 - 2x - 1 + \frac{3}{x + 2}$$

$x^2 - 2x - 1$

$$\begin{array}{r} x+2 \overline{) x^3 - 5x + 1} \end{array}$$

$\mp x^3 \mp 2x^2$

$$\begin{array}{r} -2x^2 - 5x + 1 \end{array}$$

$\pm 2x^2 \pm 4x$

$$\begin{array}{r} -x + 1 \end{array}$$

$\pm x \pm 2$

$$\begin{array}{r} 3 \end{array}$$

$$\int \frac{x^3 - 5x + 1}{x + 2} dx = \int (x^2 - 2x - 1 + \frac{3}{x + 2}) dx$$

$$= \int (x^2 - 2x - 1) dx + \int \frac{3}{x + 2} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 3 \ln|x + 2| + c$$

الاختبار البعدي:

find integration $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$ p:58,59

الحجوم الدورانية

الاختبار القبلي:

find integration $\int \frac{x^3 - 5x + 1}{x + 2} dx$ p:60

1. لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $y = f(x)$ المستمرة من $x = a$ الى $x = b$ حول محور السينات، نطبق لعلاقة الآتية:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

2. لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $x = f(y)$ المستمرة من $y = a$ الى $y = b$ حول محور الصادات، نطبق العلاقة الآتية:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$

EX1 The region defined between the $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$ and the x-axis rotates around the x-axis. Find its volume.

Sol $a = 0, b = 4$

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi \int_0^4 x \, dx \\
 &= \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \left[\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] \\
 &= 8\pi - 0
 \end{aligned}$$

$$V = 8\pi \text{ Cubic Unit}$$

EX2 Find the volume resulting from rotating the area bounded by the parabola with equation $y^2 = 8x$ and the lines $x = 0, x = 2$ about the x-axis.

Sol $a = 0, b = 2$

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b y^2 \, dx \\
 &= \pi \int_0^2 8x \, dx = \pi \left[\frac{8x^2}{2} \right]_0^2 \\
 &= \pi [4(2)^2 - 4(0)^2]
 \end{aligned}$$

$$V = 16\pi \text{ Cubic Unit}$$

EX3 Find the volume resulting from rotating the area bounded by the parabola $y = 4x^2$ and the lines $y = 0, y = 16$ about the y-axis.

Sol $a = 0, b = 16$

$$x^2 = \frac{y}{4}$$

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4} dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^2}{8} \right]_0^{16} = \pi \left(\frac{16^2}{8} - \frac{0^2}{8} \right)$$

$$V = \pi(32)$$

$$V = 32\pi \quad (\text{وحدة مكعبة}) \text{ Cubic Unit}$$

EX4 Find the volume resulting from rotating the area enclosed between the y-axis and the curve of the function $y = \frac{3}{x}$ and the lines $1 \leq y \leq 3$ a complete rotation about the y-axis.

Sol $a = 1, b = 3$

$$y = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{y} \Rightarrow x^2 = \frac{9}{y^2}$$

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy \quad V = \pi \int_1^3 \frac{9}{y^2} dy$$

$$V = \pi \int_1^3 9 y^{-2} dy$$

$$V = 9\pi \left[\frac{y^{-1}}{-1} \right]_1^3 \quad V = -9\pi \left[\frac{1}{y} \right]_1^3$$

$$V = -9\pi \left[\frac{1}{3} - 1 \right]$$

$$V = -9\pi \left(\frac{-2}{3} \right)$$

$$V = 6\pi \quad (\text{وحدة مكعبة}) \text{ Cubic Unit}$$

EX5 The region defined between the curves $1 \leq y \leq 4$ and $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$

is rotated about the y-axis. Find its volume.

Sol $a = 1, b = 4$

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_1^4 \frac{1}{y} dy$$

$$= \pi [\ln y]_1^4$$

$$= \pi (\ln 4 - \ln 1)$$

$$= \pi (\ln(2)^2 - 0)$$

$$V = 2\pi \ln 2 \quad (\text{وحدة مكعبة}) \text{ Cubic Unit}$$

EX6 Find the volume resulting from rotating the area enclosed between the function curve $y = x^2 + 1$ and the line $y = 4$ about the y-axis.

Sol

ملاحظة: اذا اعطى في السؤال y واحدة ونريد استخراج الثانية نعوض بدلا عن x صفر
لان التقاطع حول محور الصادات

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 + 1 \Rightarrow y = 1, \quad a = 1, b = 4$$

$$x^2 = y - 1$$

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_1^4 (y - 1) dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^2}{2} - y \right]_1^4 = \pi \left[\frac{4^2}{2} - 4 - \frac{1^2}{2} + 1 \right]$$

$$= \pi \left[\frac{9}{2} \right]$$

$$V = \frac{9}{2} \pi \text{ (وحدة مكعبة) Cubic Unit}$$

الاختبار البعدي:

Find the volume resulting from rotating the area bounded by the parabola with equation $y = 2x^2$ and the lines $x = 0, y = 2$ about the x-axis.

Ans 2500π (وحدة مكعبة) Cubic Unit

Area under the curve

الاختبار القبلي:

Find the volume resulting from rotating the area bounded by the parabola $y = 4x^2$ and the lines $y = 0, y = 16$ about the y-axis. P:62,63

$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

خطوات الحل:-

١. نصفر y لايجاد قيم x .

تنويه// يمكن ان نصفر قيمة x لايجاد قيمة y للاستفادة منها في رسم المنحني ومعرفة المنطقة الموجبة والسالبة.

٢. اذا كانت المنطقة المطلوب حساب مساحتها في الجزء الموجب او السالب نكامل بدون تجزئة، اما اذا كان جزء من المنطقة في الجزء الموجب وجزء منها في الجزء السالب فيجب تجزئة الفترة قبل التكامل ويتم تكامل المنطقة الموجبة في الفترة الموجبة A_1 وتكامل المنطقة السالبة في الفترة السالبة A_2 .

٣. اذا كان التكامل لأكثر من فترة نجمع المساحات لكل الفترات لايجاد المساحة الكلية $A = A_1 + A_2$.

Ex:- find the area determined by the function $f(x) = x^3 - x$ and x -axis.

Sol:-

$$y = x^3 - x$$

$$y = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1 \Rightarrow [-1, 0], [0, 1]$$

$$A_1 = \left| \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 \right| = \left| \frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right) \right|$$

$$= \left| -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \right| = \left| \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \left| \int_0^1 (x^3 - x) dx \right| = \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right| = \left| \frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} - \left(\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} \right) \right| = \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{-1}{4} \right| = \frac{1}{4}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Ex:- find the area bounded by the graph of the function $f(x) = x^4 - x^2$ and x -axis on the interval $[-1, 1]$.

Sol:-

$$y = x^4 - x^2$$

$$y = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1 \Rightarrow [-1, 0], [0, 1]$$

$$A_1 = \left| \int_{-1}^0 (x^4 - x^2) dx \right| = \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 \right| = \left| \frac{0^5}{5} - \frac{0^3}{3} - \left(\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right|$$

$$= \left| -\left(\frac{-1}{5} - \frac{-1}{3} \right) \right| = \left| \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{-2}{15} \right| = \frac{2}{15}$$

$$A_2 = \left| \int_0^1 (x^4 - x^2) dx \right| = \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \right| = \left| \frac{1^5}{5} - \frac{1^3}{3} - \left(\frac{0^5}{5} - \frac{0^3}{3} \right) \right| = \left| \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right|$$

$$= \left| \frac{-2}{15} \right| = \frac{2}{15}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$

Ex:- find the area bounded by the function $f(x) = \sqrt{x} + 1$ and x -axis from $x=0$ to $x=3$.

Sol:-

$$y = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow [0,3]$$

$$A = \left| \int_0^3 (\sqrt{x} + 1) dx \right| = \left| \int_0^3 (x + 1)^{\frac{1}{2}} dx \right| = \left| \left[\frac{2}{3} (x + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^0 \right|$$

$$= \left| \frac{2}{3} \sqrt{(3 + 1)^3} - \left(\frac{2}{3} \sqrt{(0 + 1)^3} \right) \right| = \frac{2}{3} |\sqrt{4^3} - 1| = \frac{2}{3} |\sqrt{64} - 1|$$

$$= \frac{2}{3} |8 - 1| = \frac{2}{3} (7) = \frac{14}{3}$$

Ex:- find the area bounded by the graph of the function $f(x) = x^2 - 2x - 3$ and x -axis on the interval $[-1,3]$.

Sol:-

$$y = x^2 - 2x - 3$$

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 3, x = -1 \Rightarrow [-1, 3]$$

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_{-1}^3 \right| \\ &= \left| \frac{3^3}{3} - 3^2 - 3(3) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3(-1) \right) \right| \\ &= \left| 9 - 9 - 9 + \frac{1}{3} + 1 - 3 \right| = \left| \frac{1}{3} - 11 \right| = \left| \frac{-32}{3} \right| = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

H.w:- Calculate the area between the graph of the function $y = f(x) = 4 - x^2$ and the x-axis on the interval.

المساحة بين منحنيين

Ex:- Find Calculate the area above and below the x-axis, bounded by the parabola $y^2 = 4x$ and the lines $x = 4, x = 9$?

$$y^2 = 4x$$

$$y = 2\sqrt{x}$$

$$A = \int_4^9 y \, dx$$

$$A = 2 \int_4^9 \sqrt{x} \, dx$$

$$A = 2 \int_4^9 x^{1/2} \, dx$$

$$A = 2 \cdot \frac{2}{3} \left[x^{3/2} \right]_4^9$$

$$A = \frac{4}{3} [27 - 8]$$

$$A = \frac{4}{3} [19]$$

$$A = \frac{76}{3}$$

$$A = \frac{125}{3}$$

Ex:- Find Calculate the area between the tow parabolas $y = x^2$, $x = y^2$?

$$y^2 = x$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y_1 = y_2$$

$$x^2 = \sqrt{x}$$

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0, x = 1$$

$$A = \int_0^1 y \, dx$$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx$$

$$A = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$A = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) - (0) \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

Ex:- Find The area of the shaded region ?

$$A = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \left(-\frac{1}{4}x \right) \right) dx$$

$$A = \int_0^4 \left(x^{1/2} + \frac{1}{4}x \right) dx$$

$$A = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} \frac{x^2}{2} \right]_0^4$$

$$A = \left[\frac{2}{3} (4)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8} (4)^2 - (0) \right]$$

$$A = \frac{16}{3} + \frac{16}{8} = \frac{22}{3}$$

الاختبار البعدي:

1) Find The area of the region bounded by the graphs of the two functions $y = x^2 + 8$, $y = x^2 + 1$?

2) Find The area between the curves $y = 4$ and $y = x^2$, between the two points of intersection?

Complex Number

الاختبار القبلي:

Find Calculate the area above and below the x-axis, bounded by the parabola $y^2 = 4x$ and the lines $x = 4, x = 9$? p:69,70

Ex:- Find the sum of the two complex numbers in each of the following:

$$3 + 4\sqrt{2}i, 5 - 2\sqrt{2}i$$

Sol:-

$$\begin{aligned}(3 + 4\sqrt{2}i) + (5 - 2\sqrt{2}i) \\= (3 + 5) + (4\sqrt{2} - 2\sqrt{2})i \\= 8 + 2\sqrt{2}i\end{aligned}$$

Ex:- Find the sum of the two complex numbers in each of the following:

$$1 - i, 3i$$

Sol:-

$$1 - i + 3i = (1 + 0) + (-1 + 3)i = 1 + 2i$$

$$\text{H.w:- } 3 + 2 - 5i$$

Ex:- Find the sum of the two complex numbers in each of the following:

$$\begin{aligned}(2 + 3i)^2 + (12 + 2i) \\= (4 + 12i + 9i^2) + (12 + 2i) \\= (4 + 12i - 9) + (12 + 2i) \\= (-5 + 12i) + (12 + 2i) \\= 7 + 14i\end{aligned}$$

H.w:- $(7 - 13i) - (9 + 4i)$

Ex:- Find the following:

$$(7 + 2i) - (3 + 6i) = (7 - 3) + (2i - 6i) = 4 - 4i$$

Ex:- Find the product:

$$(2 - 3i)(3 - 5i)$$

$$= 6 - 12i - 9i + 15i^2$$

$$= 6 - 15 - 19i$$

$$= -9 - 19i$$

Ex:- Solve the following equation:

$$(2 - 4i) + X = -5 + i$$

$$\Rightarrow X = -5 + i - 2 + 4i$$

$$\Rightarrow X = (-5 - 2) + (1 + 4)i$$

$$\Rightarrow X = -7 + 5i$$

H.w:- $(3 + 4i)^2$

Ex:- Solve the following equation in $\mathbb{C}$:

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 1, b = 4, c = 5$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2i}{2}$$

$$x = -2 \pm i$$

الاختبار البعدي:

1. Find the sum of the two complex numbers in each of the following:

$$3 + 4\sqrt{2}i, 5 - 2\sqrt{2}i \quad \text{p:72}$$

2. Find the following: $(7 + 2i) - (3 + 6i)$ p:73

3. Solve the following equation in $\mathbb{C}$: $x^2 + 4x + 5 = 0$ p:73,74

العمليات الإحصائية

الاختبار القبلي:

Find the sum of the two complex numbers in each of the following:

$$(2 + 3i)^2 + (12 + 2i) \quad p:72,73$$

الإحصاء

يهتم بجمع القراءات او البيانات عن الظواهر وتضمينها واختزال وتحليلها وتفسيرها واتخاذ القرارات بشأنها. بعض المفاهيم الأساسية لعلم الإحصاء:-

(١) المجتمع: المجتمع الإحصائي هو مجموعة من العناصر التي تشترك جميعها بميزات متشابهة ومتطابقة، مثلا المدارس الابتدائية في العراق المصابون بمرض معين وهكذا....

(٢) العينة: مجموعة جزئية مسحوبة حسب أصول علمية متقنة ومحددة من مجتمع ما. في حياتنا اليومية نلاحظ وجود كم هائل من المتغيرات او الظواهر الغير ثابتة، مثل درجة الحرارة، كمية الامطار، نسبة الرطوبة، عدد الطلاب، عدد طلاب الجامعة، عدد المصابين بمرض معين مما يؤدي الى وجود منتج ونتيجة. بعد تحديد المتغيرات او الظاهرة التي نرغب في دراستها تكون الخطوة الأولى جمع المعلومات على شكل قراءات او مشاهدات او بيانات نستخدم عادة الحروف الكبيرة من الابجدية الإنكليزية مثل X, Y, Z للمتغيرات والحروف الصغيرة X, Y, Z تمثل رمز القراءة الواحدة من القراءات.

اقسام الإحصاء:

(a) الإحصاء الاستدلالي.

(b) الإحصاء الوصفي.

الإحصاء الاستدلالي

وهو أوسع بكثير من الإحصاء الوصفي ويمثل على التحليل والنتائج، استقراء النتائج واخذ القرار يرتبط بمقياسه على الاحتمالية، لان النتائج التي نحصل عليها ليست نسبية ولا ترقى الى مستوى البرهان الرياضي.

الإحصاء الوصفي

يقسم الى قسمين:

عرض البيانات.

مقياس النزعة المركزية.

أولاً:- عرض البيانات:- هناك طرق مختلفة لعرض البيانات بشكل منظم و واضح والهدف من عرض البيانات بهذا الشكل هو تسهيل مهام الباحث الاحصائي ومساعدته على تقديم ما لديه من بيانات كثيرة ومتنوعة وإعطاء صورة عنها بشكل بسيط ويسهل فهمه. ومن اهم طرق عرض البيانات ما يأتي:-

أولاً: الجدول الاحصائي Statistical table

هو توزيع تكراري للقيم العددية الظاهرة التي يراد دراستها.

Ex:- If we took the grades of 50 students in mathematics and they were as follows:

85, 80, 55, 37, 66, 65, 48, 74, 28, 22, 92, 59, 74, 52, 87, 89, 69, 57, 40, 78, 60, 40, 43, 28, 45, 60, 83, 80, 53, 75, 35, 73, 72, 81, 70, 71, 50, 61, 48, 68, 91, 42, 89, 78, 72, 70, 83, 51, 64, 73.

Such data in a **Statistical table:**

Sol:-

Categories الفئات	Repetition التكرار	more than اكثر من	descending cluster repetition التكرار المتجمع النازل	Below اقل من	ascending cumulative repetition التكرار المتجمع الصاعد
20-	3	20	50	30	3
30-	2	30	47	40	5
40-	7	40	45	50	12
50-	7	50	38	60	19
60-	8	60	31	70	27
70-	12	70	23	80	39
80-	9	80	11	90	48
90-100	2	90	2	100	50

ثانياً: التوزيعات التكرارية المجتمعة

هي طريقة لتجميع البيانات في فئات (Intervals) مع تسجيل عدد مرات تكرار القيم ضمن كل فئة. (للاطلاع)

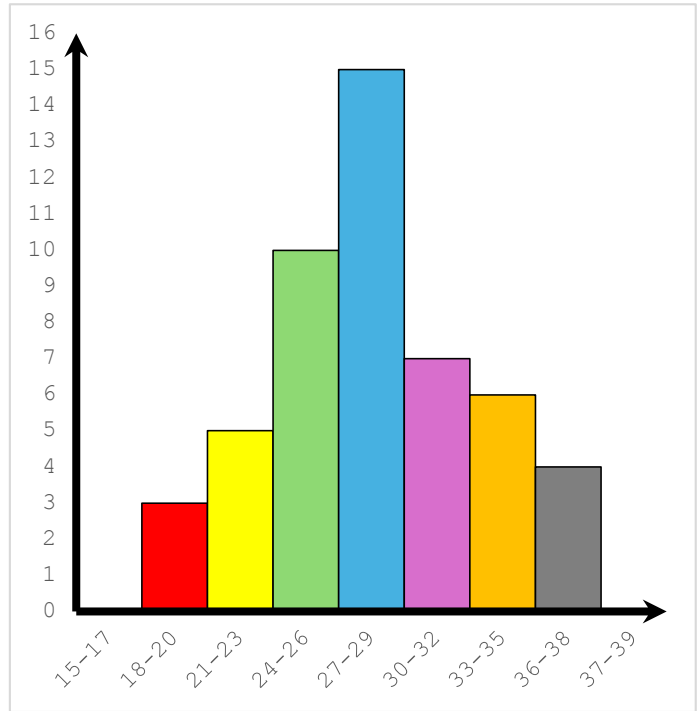
ثالثاً: تحميل البيانات للتوزيعات التكرارية للأشكال المتنوعة

أ) المدرج التكراري *iterative runway*:

هو أحد الأشكال البيانية تمثل فيه التكرارات بمستطيلات رئيسية تكون القاعدة على المحور الأفقي الذي يمثل المحور .x

Ex:- Find the *iterative runway* that represents the range of ages of chemists working in a large laboratory:

Categories الفئات	Repetition التكرار
18-20	3
21-23	5
24-26	10
27-29	15
30-32	7
33-35	6
36-38	4



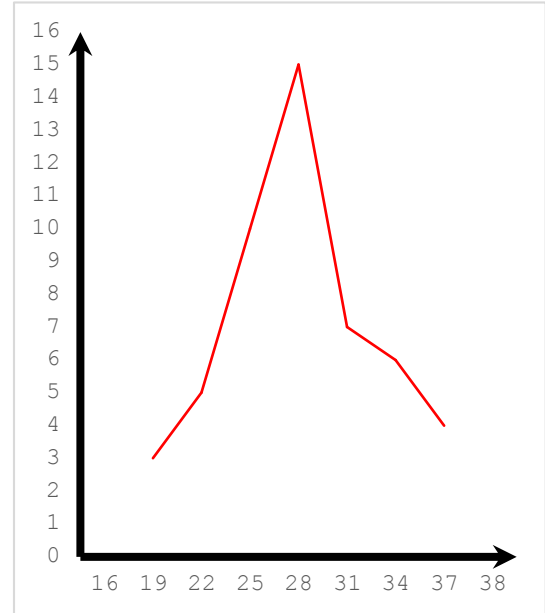
ب) المنحني التكراري *recursive curve*:

هو نوع من التمثيل البياني يُستخدم لعرض توزيع البيانات، لكن بدلاً من رسم أعمدة كما في المدرج التكراري، نرسم نقاطاً عند منتصف كل فئة، بحيث يكون ارتفاع كل نقطة مماثلاً لتكرار تلك الفئة، ثم نصل بين هذه النقاط بخط منحني ناعم، ولرسم المنحني التكراري نحتاج إلى إيجاد مركز الفئة من خلال القانون:

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الاعلى} + \text{الحد الادنى}}{2}$$

Ex:- Draw the recursive curve for the ages of chemists working in a large laboratory:

Categories	Repetition	Category Center
الفئات	التكرار	مركز الفئة
18-20	3	19
21-23	5	22
24-26	10	25
27-29	15	28
30-32	7	31
33-35	6	34
36-38	4	37



ج) المضلع التكراري *repetitive polygon*:

هو رسم بياني يشبه المنحني التكراري، لكن بدلاً من توصيل النقاط بخط منحني وناعم، نوصلها بخطوط مستقيمة. (للاطلاع)

مقياس النزعة المركزية

وتسمى أحيانا بمقياس المتوسط وهي عبارة عن كمية ذات موقع مركزي ويعبر عن مجموعة من البيانات لظاهرة معينة وتفيد في المقارنة ويكون مقياس المتوسط ممثلاً للمجتمع أو الظاهرة تمثيلاً صادقاً دون التميز إذا توفرت فيه الشروط التالية:

١. ان يكون قيمة المتوسط محدودة ومحسوبة بموجب معادلة رياضية.
٢. يجب ان لا يتأثر كثيراً باختيار العينة.
٣. يجب ان يكون المتوسط سهل الحساب مع عدم التضحية بالدقة في سبيل السهولة.
٤. ان يكون من الممكن التعبير عنه جبرياً.

أنواع مقياس النزعة المركزية

أولاً: الوسط الحسابي $\bar{X}$ arithmetic mean

(أ) الوسط الحسابي للقيم الغير مبوبة، وقانونه هو: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

Ex:- Find the arithmetic mean of the following data:

19, 17, 18, 12, 15

Sol:-

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{19+17+18+12+15}{5} = 16.2$$

(ب) الوسط في البيانات المبوبة (تكرارية أو مجدولة في فئات): قانونه $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$

Ex:- Find the arithmetic mean of the following data:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{799}{50} = 15.98$$

الفئات	التكرار f_i	مركز الفئة x_i	$x_i f_i$
5-	3	6.5	19.5
8-	8	9.5	76
11-	7	12.5	87.5
14-	10	15.5	155
17-	9	18.6	166.5
20-	8	21.5	172
23-25	5	24.5	122.5
Σ	50		799

ثانياً: الوسيط M The mediator : هو أحد مقاييس النزعة المركزية في الإحصاء، ويُستخدم لتحديد القيمة التي تقع في منتصف مجموعة من البيانات بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً.
(أ) الوسيط للبيانات الغير مبوبة:-

- (١) اذا كان عدد القيم فردي فان الوسيط هو القيمة التي يكون ترتيبها $\frac{+1 \text{ عدد القيم}}{2}$.
- (٢) اذا كان عدد القيم زوجي فان الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين الوسطيتين. بتعبير اخر هو حاصل جمع القيمتين التي يكون ترتيبهما وسط القيم مقسوماً على 2.

Ex:- Find the median of the following numbers:

1) 15, 8, 1, 7, 4, 13, 5, 10, 6, 2

2) 20, 15, 12, 10, 4

Sol:-

1) 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 15

$$M = \frac{7+6}{2} = 6.5$$

2) 4, 10, 12, 15, 20

$$M=12$$

$$M = A + \frac{\frac{\sum_{i=1}^n f_i}{2} - p}{f} \times L \quad \text{(ب) الوسيط للبيانات المبوبة:-}$$

حيث ان:

M هو المنوال

A الفئة الوسيطة

$\sum_{i=1}^n f_i$ مجموع التكرارات

P التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الوسيطة

F تكرار الفئة الوسيطة

L طول الفئة الوسيطة

ثالثاً: المنوال E The loom

هي القيمة الأكثر تكراراً في التوزيع وهو أبسط مقاييس النزعة المركزية

(أ) المنوال في حالة البيانات غير المبوبة:

Ex:- Find the loom for the following values: 65, 100, 65, 67, 65, 20, 27

Sol:- E = 65

$$E = A + \frac{f_2 - f_1}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)} \times L$$

حيث ان:-

E المنوال

A الفئة المنوالية (الفئة المقابلة لأكبر تكرار)

f_2 تكرار الفئة المنوالية

f_1 التكرار السابق للفئة المنوالية

f_3 التكرار اللاحق للفئة المنوالية

L طول الفئة (الفرق بين أي فئتين متتاليتين)

Ex:- Find the loom for the data in the following table:

Sol:

$$E = A + \frac{f_2 - f_1}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)} \times L$$

$$= 35 + \frac{10 - 8}{(10 - 8) + (10 - 6)} \times 5 = 36.67$$

الفئة	التكرار
20-24	5
25-29	7
30-34	8
35-39	10
40-44	6
45-59	4

الاختبار البعدي:

:- If we took the grades of 50 students in mathematics and they were as follows:

85, 80, 55, 37, 66, 65, 48, 74, 28, 22, 92, 59, 74, 52, 87, 89, 69, 57, 40, 78, 60, 40, 43, 28, 45, 60, 83, 80, 53, 75, 35, 73, 72, 81, 70, 71, 50, 61, 48, 68, 91, 42, 89, 78, 72, 70, 83, 51, 64, 73.

Such data in a Statistical table:

P: 76