م.م سعد قاسم محمد

المصفوفات (Matrices)

المصفوفات :- هي مجموعة اعداد مرتبة بشكل مستطيل محصورة بين قوسين وتخضع لمجموعة من القواعد والعمليات .

- تتكون من عدد من الصفوف (rows) وعدد من الاعمدة (columns) وان حاصل ضرب عدد الصفوف في عدد الاعمدة يسمى مرتبة (درجة) المصفوفة .

مثال على ذلك :-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

بصورة عامة تكتب بشكل

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث (m) عدد الصفوف

(n) عدد الاعمدة

عمليات على المصفوفات :-

① الجمع والطرح

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

احسب ① $A+B$

② $A-B$

Sol:-

① $$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -6 & 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2 & 4+0 & 7+1 \\ -6+3 & 3+4 & -1+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 \\ -3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

② $A - B = ?$

Scanned with CamScanner

② ضرب مصفوفة في عدد حقيقي او القسمة عليه :

Ex:- $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 0.4 \end{bmatrix}$

فاحسب مايلي :- ① $3A$, ② $-A+2B$, ③ $\frac{B}{-2}$

Sol:-

① $3A = 3\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 3 & 3\times 0 \\ 3\times 1 & 3\times 2 \\ 3\times 6 & 3\times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 6 \\ 18 & 15 \end{bmatrix}$

② $-A+2B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -2 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 0.4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -2 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 6 & 0.8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -6 \\ 0 & -4.2 \end{bmatrix}$

③ $\frac{B}{-2} = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.5 \\ 0 & 1 \\ -1.5 & -0.2 \end{bmatrix}$

③ ضرب صف في عمود (هذا الضرب ليس تبديلي)

① $a = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$

$a = [(1 \times -3) + (-2 \times 1) + (0 \times 4) + (0.3 \times 10)]$

$= -3 - 2 + 0 + 3 = -2$

② $b = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

لا يمكن حسابها لانه عدد الصفوف $\neq$ عدد الاعمدة.

---

④ ضرب مصفوفتين :- في عملية الضرب شرط عدد اعمدة المصفوفة الاولى مساويا الى عدد صفوف المصفوفة الثانية.

Ex $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 30 \\ 15 & 0 & -12 \\ 23 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

احسب مايلي ① AB ، ② BA ③ BC

① $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$\underbrace{2\times 3 \quad \quad 3 \times 2}_{\text{متساوية}}$

$$AB = \begin{bmatrix} (2 \ \ 1 \ \ 0)\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} & (2 \ \ 1 \ \ 0)\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \\ (5 \ \ -1 \ \ 3)\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} & (5 \ \ -1 \ \ 3)\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2\times1)+(1\times-1)+(0\times3) & (2\times1)+(1\times2)+(0\times-2) \\ (5\times1)+(-1\times-1)+(3\times3) & (5\times1)+(-1\times2)+(3\times-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 15 & -3 \end{bmatrix}$$

② $BA = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \\ -4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

$AB \neq BA$

③ $BC = ?$

هل يمكن حلها ... ؟

ولماذا !!

H.W:

$$A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

احسب مايلي :-

① $(AB)C$, ② $A(BC)$

ans: $\begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$

Determinants المحددات

المحدد من الرتبة $n \times n$ هو عدد حقيقي نحصل عليه من المصفوفة المربعة ويرمز له بالرمز $\det(A)$

① حساب المحددات 2×2 :-

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال :- احسب المحددات التالية

① $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$, ② $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$

Ans :

① $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 2$

② $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5$

② حساب المحددات 3×3

باستخدام طريقة العوامل المتممة (cofactors)

مثال/ جد $|A|$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$|A| = 5\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \times 6 - 7 \times 3 + 8(3 - 12)$$

$$= 30 - 21 + 8 \times (-9) = -63$$

المعادلات الخطية

طريقة كرامر (Gramer's Rule)

لتكن $Ax = B$ نظام من المعادلات الخطية التي رتبتها $n \times n$ وتحتوي على n من المجاهيل بحيث ان محددها $|A| \neq 0$ عندئذ يكون للنظام حل وحيد اذن :

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad , \quad X_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

حيث $|A|$ محدد المعاملات

$|A_1|$ محدد معاملات X_2 مع الحد الثابت

$|A_2|$ محدد معاملات X_1 مع الحد الثابت

Ex. $9x + 4y = -6$

$3x - 5y = -21$

Sol.:-

① نوجد محدد المعاملات $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -45 - 12 = -57$$

② نوجد $|A_1|$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -21 & -5 \end{vmatrix} = 30 - (-84) = 114$$

③ نوجد $|A_2|$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 9 & -6 \\ 3 & -21 \end{vmatrix} = -189 - (-18) = -171$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{114}{-57} = -2$$

$$y = \frac{-171}{-57} = 3$$

$\therefore (x, y) = (-2, 3)$

للتحقق من صحة الحل تعويض (x,y) في المعادلة

مثال: باستخدم قاعدة كرامر لحل المعادلات الخطية.

$$x - y = 1$$
$$x - z = 3$$
$$y + z = 8$$

Sol:-

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_3|}{|A|}$$

$$|A| = 1(0 \times 1 + 1) + 1(1) + 0 = 2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

$$x = \frac{12}{2} = 6$$

$$y = \frac{10}{2} = 5, \quad z = \frac{6}{2} = 3$$

بنفس الطريقة.

H.W:

① $4x + y + z = 5$

$3x + y + 4z = 10$

$x + y + z = 2$

Ans: $(1, -1, 2)$

② $x + 2y + z = 4$

$3x - 5y + 3z = 1$

$2x + 7y - z = 8$

Ans: $(1, 1, 1)$

③ $3x - 4y = -15$

$2x + 5y = 13$

Ans: $(-1, 3)$

م.م سجى قاسم محمد

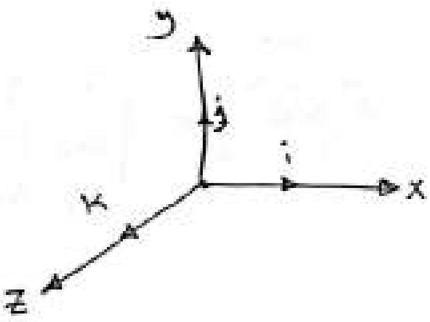
المتجهات والقيم العددية
Vectors & Scalars

تسمى الكميات التي لها مقدار عددي وليس لها اتجاه بالقيم العددية وتكون غير اتجاهية مثل الطول، الزمن، درجة الحرارة، المساحة، ... الخ

اما الكميات التي لها مقدار عددي واتجاه تسمى بالمتجهات Vectors مثل القوة $\vec{F}$ والسرعة $\vec{V}$ والتعجيل $\vec{a}$.

* لكل متجه ثلاث متغيرات هي (K, j, i) ويكتب

$$\vec{A} = a_1 i + a_2 j + a_3 K$$



Ex :-

$$\vec{A} = i + 2j + 3K$$

حيث $a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_3 = 3$

العمليات الجبرية على المتجهات

① الجمع والطرح

$$\mp \begin{array}{l} \vec{A} = a_1 i + a_2 j + a_3 K \\ \vec{B} = b_1 i + b_2 j + b_3 K \end{array}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 \mp b_1) i + (a_2 \mp b_2) j + (a_3 \mp b_3) K$$

② ضرب المتجه في عدد ثابت

$$c\vec{A} = ca_1 j + ca_2 j + ca_3 k$$

③ طول المتجه $|\vec{A}|$

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

دائماً تكون القيمة موجبة

④ متجه الوحدة العمودي $\vec{u}$ لمتجه واحد

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{|\vec{A}|} = \frac{a_1}{|\vec{A}|} i + \frac{a_2}{|\vec{A}|} j + \frac{a_3}{|\vec{A}|} k$$

⑤ ايجاد قيمة الضرب الديكارتي cross (X)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= i\,(a_2 b_3 - a_3 b_2) \; ----$$

⑥ ايجاد قيمة متجه الوحدة العمودي $\vec{u}$ بين متجهين $\vec{u}\,(\vec{A}, \vec{B})$

$$\vec{u}\,(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{A \times B}{|A \times B|}$$

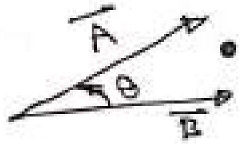
⑦ لاستخراج الزاوية θ حسب قانون الضرب الاتجاهي.

$\theta(\vec{A},\vec{B})$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \sin\theta$$

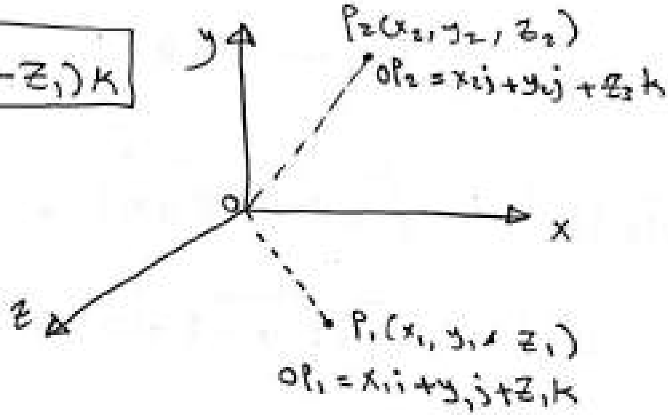
⑧ الضرب العددي (Dot) وايجاد الزاوية θ بواسطة cos

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \cos\theta$$



* ايجاد المتجه بين نقطتين

$$\boxed{P_1P_2 = (x_2-x_1)i + (y_2-y_1)j + (z_2-z_1)k}$$



Ex: $\vec{A} = 2i + 3j + 4k$

$\vec{B} = i + j + k$

Find: ① $\vec{A} + \vec{B}$, ② $\vec{A} - \vec{B}$, ③ $3\vec{B}$, $5\vec{A}$

④ $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$, ⑤ $\vec{u}(A)$, $\vec{u}(B)$ ⑥ $\vec{A} \times \vec{B}$

⑦ $|\vec{A} \times \vec{B}|$, ⑧ $\vec{u}(\vec{A},\vec{B})$ ⑨ $\theta(\vec{A},\vec{B})$

⑩ $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$\Longrightarrow$ ------

⟹ Solution

① $\vec{A}+\vec{B} = 2i+3j+4K$

$\quad\quad\quad\quad i+j+K$

$\quad\quad\quad\quad 3i+4j+5K$

② $\vec{A}\cdot\vec{B} = i+2j+3K$

③ $5\vec{A} = 5(2i+3j+4K)$

$= 10i+15j+20K$

$3\vec{B} = 3i+3j+3k$

④ $|\vec{A}| = \sqrt{(2)^2+(3)^2+(4)^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$

$|\vec{B}| = \sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2} = \sqrt{3}$

⑤ $\vec{u}(\vec{A}) = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2i+3j+4k}{\sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}i+\frac{3}{\sqrt{29}}j+\frac{4}{\sqrt{29}}K$

$\vec{u}(\vec{B}) = \frac{1}{\sqrt{3}}i+\frac{1}{\sqrt{3}}j+\frac{1}{\sqrt{3}}K$

⑥ $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & K \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i(3-4)-j(2-4)+K(2-3)$

$= -i+2j-K$

⑦ $|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

⑧ $$\vec{u}(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{-i + 2j - k}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{6}} i + \frac{2}{\sqrt{6}} j + \frac{1}{\sqrt{6}} k$$

⑨ $\theta(\vec{A}, \vec{B}) \Rightarrow |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \cdot \sin\theta$

$$\sqrt{6} = \sqrt{29} \times \sqrt{3} \sin\theta$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29} \times \sqrt{3}} = \sin\theta \Rightarrow \theta = \sin^{-1}(0.2626)$$

$$\theta = 15^{\circ}.22$$

⑩ $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \cos\theta$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2 \times 1) + (3 \times 1) + (4 \times 1) = 9 \Rightarrow$ (Dot Product)

next Page

So $9 = \sqrt{29} \times \sqrt{3} \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{9}{\sqrt{29} \times \sqrt{3}}$

$$\theta = 15^{\circ}.22$$

* اذا كان المتجهين $\vec{A} \cdot \vec{B}$ متعامدين فان الزاوية تكون 90 وتكون قيمة

$\cos(90) = 0$

Dot Product الضرب النقطي

$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \cos\theta$

ملاحظة ①:- اذا كانت الزاوية بين المتجهات صفر فإن $\cos(0)=1$

$|\vec{A}|\times|\vec{B}| \cos(0) = |\vec{A}|\times|\vec{B}|\times 1 = |\vec{A}|\times|\vec{B}|$

② اذا كان المتجه $\vec{A}$ موازي المتجه $\vec{B}$ اي يسلكون نفس الاتجاه فإن الزاوية تساوي صفر.

حساب الضرب النقطي:-

$\vec{A} = a_1 i + a_2 j + a_3 K$

$\vec{B} = b_1 i + b_2 j + b_3 K$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = (a_1 i + a_2 j + a_3 K)\cdot(b_1 i + b_2 j + b_3 K)$

$= a_1 i (b_1 i + b_2 j + b_3 K) + a_2 j (b_1 i + b_2 j + b_3 K) + a_3 K (b_1 i + b_2 j + b_3 K)$

$= a_1 b_1 (i\cdot i) + a_1 b_2 \cancel{(j\cdot j)} + a_1 b_3 \cancel{(i\cdot K)} + a_2 b_1 \cancel{(j\cdot i)} + a_2 b_2 (j\cdot j)$
$+ a_2 b_3 \cancel{(j\cdot K)} + a_3 b_1 \cancel{(K\cdot i)} + a_3 b_2 \cancel{(K\cdot j)} + a_3 b_3 (K\cdot K)$

$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$

For Perpendicular unit vectors (i, j, K)

$i\cdot j = j\cdot K = K\cdot i = 0$ --- ①

Since $[\, i\cdot j = |i|\times|j| \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$i\cdot i = j\cdot j = K\cdot K = 1$ --- ②

Since $i\cdot i = |i|\times|i| \cos(0) = 1$

Ex: جد الزاوية بين ① $\vec{A} = 2i + 2j - K$ و $\vec{B} = 6i - 3j + 2K$

② ماقيمة (a) التي تجعل المتجه $\vec{A} = ai - 2j + k$

والمتجه $\vec{B} = 2ai + aj - 4K$ متعامدين

Sol:

ⓐ $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos\theta$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2 \times 6) + (2 \times -3) + (-1 \times 2)$

$= 12 - 6 - 2 = 4$

$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3$

$|\vec{B}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = 7$

$4 = 3 \times 7 \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{4}{21}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{21}\right) \simeq 79^\circ$

ⓑ $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ لأن $\theta = 90^\circ$

$0 = (a \times 2a) + (-2 \times a) + (1 \times -4)$

$0 = 2a^2 - 2a - 4$

$a^2 - a - 2 = 0$

$(a - 2)(a + 1) = 0$

$a = 2$

or $a = -1$

مثال: جد $(\vec{u})$ من النقطة $P_1(1,0,1)$ الى النقطة $P_2(3,2,0)$

Sol.

$$P_1P_2 = (3-1)i + (2-0)j + (0-1)K$$

$$= 2i - 2j + K$$

$$\vec{u}(P_1P_2) = \frac{\vec{P_1P_2}}{|\vec{P_1P_2}|} \Rightarrow |\vec{P_1P_2}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{u}(P_1P_2) = \frac{2i + 2j - K}{3} = \frac{2}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{1}{3}K$$

H.W

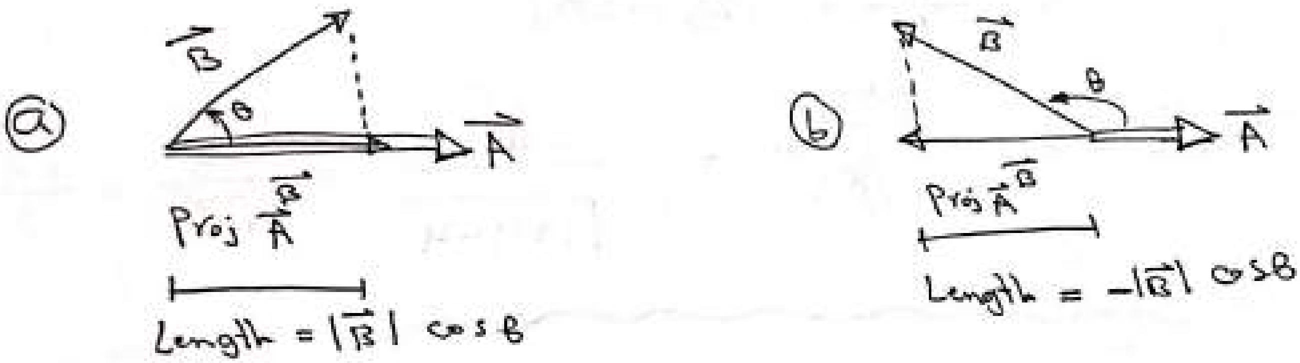
اذا كان $\vec{A} = 2i + j - 3K$ و $\vec{B} = i - 2j + K$
جد المتجه الذي طوله (5) وعمودي على كلاً من المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

المسقط Projection

ليكن كلا من $\vec{A}$ و $\vec{B}$ متجهين فإن مسقط المتجه $\vec{B}$ على المتجه $\vec{A}$
يرمز له بالرمز ($Proj_{\vec{A}}\vec{B}$)

$$Proj_{\vec{A}}\vec{B} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|^2}\vec{A} \quad , \quad |\vec{A}|^2 = \vec{A}\cdot\vec{A}$$

ملاحظة 1 - اذا كانت الزاوية (θ) بين $\vec{A}$, $\vec{B}$ كما موضح في الشكل
(a) فإن طول مسقط المتجه لـ $\vec{B}$ على $\vec{A}$ هو [$|\vec{B}|\cos\theta$]
بينما في الشكل (b) طول مسقط المتجه هو [$-|\vec{B}|\cos\theta$]



ملاحظة 2 - المركب العددي لـ $\vec{B}$ باتجاه $\vec{A}$ يمكن ايجاده من

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$|\vec{B}|\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|} = \vec{B}\cdot\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

Ex: جد مسقط المتجه $\vec{B} = 6i + 3j + 2K$ على $\vec{A} = i - 2j - 2K$
وقيمة المركب العددي لـ $\vec{B}$ باتجاه $\vec{A}$

Sol:-

$$Proj_{\vec{A}}\vec{B} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|^2}\vec{A} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\vec{A}$$

$$= \frac{(1*6) + (-2*3) + (-2*2)}{1+4+4} * (i - 2j - 2K)$$

$$= \frac{-4}{9}(i - 2j - 2K)$$

$$|B|\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|} = \frac{-4}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{-4}{\sqrt{9}} = \frac{-4}{3}$$

H.W: جد الزاوية للمثلث $B\hat{A}C$ الذي رؤوسه $A(1,0,1)$
و $B(2,-1,1)$ و $C(-2,1,0)$

H.W: هل إن $\vec{A} \perp \vec{B}$ او $\vec{A} \parallel \vec{B}$

$\vec{A} = 3i + 9j + 6K$
$\vec{B} = i + 3j + 2K$

اللوغاريتم (Log)

اللوغاريتم :- هو قيمة اس الاساس للعدد الاصلي

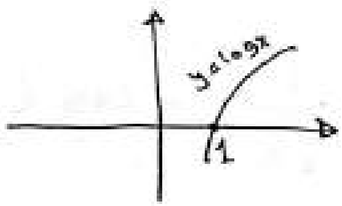
$8 = 2^3$ $\qquad$ $9 = 3^2$ $\qquad$ $\log_8 64 = 2$

$\log_2 8 = 3$ $\qquad$ $\log_3 9 = 2$ $\qquad$ $\log_4 64 = 3$

لوغاريتم 8 للاساس 2 $\qquad$ $\log_2 64 = 6$

ملاحظة :- لايوجد log للعدد السالب .

رسم دالة $y = \log x$



انواع اللوغاريتمات

$\log_n(x \cdot y) = \log_n x + \log_n y$

$\log_n(x/y) = \log_n x - \log_n y$

$\log(x^n) = n \log_n x$

$\log(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_n x$

If $n \neq 0$

من الاخطاء :-

$\log_n(x+y) \neq \log x + \log y$

$\frac{\log 6}{\log 2} \neq \log\left(\frac{6}{2}\right)$

$(\log_2 x)^3 \neq 3 \log_2 x$

$\underline{Ex}$ احسب مايلي

a) $\log_4 2 + \log_4 32$

$= \log_4(2 \times 32) = \log_4(64) = \log_4 4^3 = 3$

b) $\log_2 80 - \log_2 5$

$= \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

c) $-\frac{1}{3}\log 8$

$= \log 8^{\frac{-1}{3}} = \log \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \log\left(\frac{1}{2}\right)$

Ex:- استخدم قوانين اللوغاريتمات لكتابة المقادير التالية كحاصل جمع مجرد.

a) $\log_2(6x) = \log_2 6 + \log_2 x$

b) $\log_5(x^3 y^6) = \log_5 x^3 + \log_5 y^6 = 3\log_5 x + 6\log_5 y$

c) $\ln\left(\frac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right) = \ln(ab) - \ln\sqrt[3]{c} = \ln a + \ln b - \frac{1}{3}\ln c$

* اللوغارتم العشري :- اي الاساس 10 ويحذف عند الكتابة

$\log x = \log_{10} x$

$\log 10 = 1$

$\log 100 = 2$

Ex:- ضم $3\log x + \frac{1}{2}\log(x+1)$ في لوغاريتم واحد فقط

① $3\log x + \frac{1}{2}\log(x+1) = \log x^3 + \log(x+1)^{\frac{1}{2}}$

$= \log(x^3 + (x+1)^{\frac{1}{2}})$

* اللوغاريتم الطبيعي :- هو اللوغاريتم الذي له الاساس (e) ويرمز له بالرمز (ln)

اي ان $\ln x = \log_e x$

وتكون دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x$ هي الدالة العكسية للدالة الاسية الطبيعية $y = e^x$ اي ان

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$

$\ln 1 = 0$ $\qquad \ln e = 1$

$\ln e^x = x$ $\qquad e^{\ln x} = x$

* $\ln e^8 = 8$ $\qquad$ & $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = \ln e^{-2} = -2$

Ex:- ضم $3\ln s + \frac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2+1)$ في لوغاريتم واحد.

$3\ln s + \frac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2+1) = \ln s^3 + \ln t^{\frac{1}{2}} - \ln(t^2+1)^4$

$= \ln(s^3 t^{\frac{1}{2}}) - \ln(t^2+1)^4$

$= \ln\left(\frac{s^3 t^{\frac{1}{2}}}{(t^2+1)^4}\right)$

صيغة تغيير الاساس :-

اذا فرضنا انه لدينا $\log_a x$ ونريد ايجاد $\log_b x$

نضع $y = \log_b x$

نكتبه بالصورة الاسية نحصل على $b^y = x$

$$\log_a(b^y) = \log_a(x)$$

$$y \log_a b = \log_a(x)$$

$$y = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \Rightarrow \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

اذا كانت $a=x$ فان $\log_a a = 1$

المعادلات الأسية واللوغاريتمية :-

المعادلات الاسية :- هي المعادلة التي يكون فيها المتغير في الاس

$$2^x = 7 \Rightarrow \ln 2^x = \ln 7$$

$$x \ln 2 = \ln 7$$

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 2}$$

- الطريقة المتبعة لحل المعادلات الاسية :-

1- عزل التعبير الاسي في احد جهات المعادلة.

2- اخذ لوغاريتم للطرفين ثم استخدام قوانين اللوغاريتم لكي تنزل الاس الى الاسفل.

3- حل المعادلة لايجاد المتغير

Ex:- اوجد حل المعادلة $3^{x+2} = 7$

$$3^{x+2} = 7 \Rightarrow \log(3^{x+2}) = \log 7$$

$$(x+2)\log 3 = \log 7 \Rightarrow x+2 = \frac{\log 7}{\log 3}$$

$$x = \frac{\log 7}{\log 3} - 2$$

Ex:- حل المعادلة $8e^{2x} = 20$

$$8e^{2x} = 20 \Rightarrow e^{2x} = \frac{20}{8} = 2.5$$

$$\ln e^{2x} = \ln 2.5$$

$$2x = \ln 2.5 \Rightarrow x = \frac{\ln 2.5}{2}$$

H.W:- حل المعادلة $e^{3-2x} = 4$

Ex: حل المعادلة $e^{2x} - e^{x} - 6 = 0$

Sol: ضع $y = e^{x}$

$$y^2 - y - 6 = 0$$

$$(y-3)(y+2) = 0$$

$y = 3$
or $y = -2$ $\rightarrow$ $y = e^{x}$ $\therefore$ $e^{x} = -2$
or $e^{x} = 3$

حيث ان (-2) لا تقع في مدى الدالة e^{x} ($e^{x} > 0$ لكل قيم x)

$\therefore$ $e^{x} = 3$ اي ان $x = \ln e^{x} = \ln 3$

Ex: $3xe^{x} + x^2 e^{x} = 0$

$$xe^{x}(3+x) = 0$$

$$e^{x} \neq 0$$

$$x(3+x) = 0$$

$x = 0$

or $x = -3$

الدوال اللوغاريتمية : التي يكون فيها المتغير داخل احد الدوال اللوغاريتمية.

$\log_2(x+2) = 5$

لحلها نكتب بالصيغة الاسية

$x+2 = 2^5$

$x = 2^5 - 2 = 32 - 2 = 30$

* الطريقة المتبعة لحل الدوال اللوغاريتمية

1- اعزل التعبير اللوغاريتمي في احد جهات المعادلة

2- اكتب المعادلة في صورتها الاسية

3- حل المعادلة لايجاد المتغير

Ex:- ⓐ $\ln x = 8$

$e^{\ln x} = e^8 \Rightarrow x = e^8 \simeq 2981$

ⓑ $\log_2(25 - x) = 3$

$25 - x = 2^3 \Rightarrow x = 25 - 8$

$x = 17$

ⓒ $4 + 3\log(2x) = 16 \Longrightarrow$ H.W

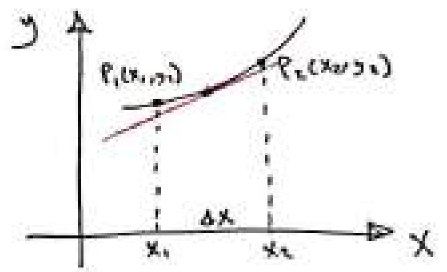
Ans: $x = 5000$

ⓓ $\log(x+2) + \log(x-1) = 1 \Rightarrow$ H.W

التفاضل

الاشتقاق (The Derivative)

المشتقة :- هي ميل المماس لمنحني الدالة او هو نهاية (Limit) معدل التغير لـ(y) بالنسبة الى المتغير (x) عندما تقترب Δx من الصفر .



* ايجاد المشتقة حسب التعريف وحسب القوانين

قانون ايجاد المشتقة الاولى باستخدام التعريف

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ex :- جد المشتقة حسب التعريف للدالة $y=x$

Sol:

$$y = x = f(x)$$

$$f(x+\Delta x) = x + \Delta x$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

Ex $y = x^2$

$$y = x^2 = f(x)$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x + 0 = 2x$$

Ex $f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \& \quad f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} * \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ملاحظة: يرمز للمشتقة الاولى بالرمز y' او $f'(x)$ او $\frac{dy}{dx}$

H.W :-

① $y = \frac{1}{x}$ ② $y = \sqrt{4x+1}$

قوانين مشتقة الدوال الجبرية

① $F(x) = c \Rightarrow \frac{d}{dx}(c) = 0$

اي ان مشتقة الثابت = 0

② $F(x) = x^n \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$ مشتقة دالة مرفوعة الى قوة

③ $F(x) = cU \Rightarrow \frac{d}{dx}(cU) = c\frac{du}{dx}$ مشتقة ثابت مضروب بالدالة

④ $F(x) = u + v$

$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ مشتقة جمع او طرح دالتين

⑤ $F(x) = u \cdot v$

$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ مشتقة حاصل ضرب دالتين

⑥ $F(x) = \frac{u}{v}$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ مشتقة القسمة

جد مشتقة الدوال التالية.

① $y = 4 \longrightarrow f'(x) = 0$

② $f(x) = x^5 \longrightarrow f'(x) = 5x^4$

③ $f(x) = 4x^3 \longrightarrow f'(x) = 12x^2$

④ $f(x) = (x^5 + x^3) \longrightarrow f'(x) = 5x^4 + 3x^2$

⑤ $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{(x+1) \cdot 2x - x^2}{(x+1)^2}$

$$= \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

⑥ $f(x) = (x^2 + 1)(1 - x^5)$

$$f'(x) = (x^2+1)(-5x^4) + (1 - x^5)(2x)$$

$$= -5x^6 - 5x^4 + 2x - 2x^6$$

$$= 2x - 5x^4 - 7x^6$$

* اذا كانت الدالة $y = \sqrt[n]{u}$

$$y = \sqrt[n]{u} \Rightarrow y = u^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1}}_{\text{مشتقة القوس}} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{\text{مشتقة داخل القوس}}$$

Ex: $y = \sqrt{x^2+5}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^2+5)^{\frac{-1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

Ex: $y = x^2\sqrt{4-x}$

$$y = x^2 (4-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{2}(4-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) + (4-x)^{\frac{1}{2}} \cdot (2x)$$

$$= \frac{-x^2}{2\sqrt{4-x}} + 2x\sqrt{4-x}$$

Ex: $y = \sqrt[3]{4-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{3} \frac{x}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}$$

مشتقة المراتب العليا

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

EX $y = x^5 + x^3 + 6x + 3$ Find $\frac{d^6y}{dx^6}$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3x^2 + 6$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 + 6x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2 + 6 \Rightarrow \frac{d^4y}{dx^4} = 120x$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 120 \Rightarrow \frac{d^6y}{dx^6} = 0$$

EX $y = x^3 - 6x^2 + 5x$ Find $\frac{d^3y}{dx^3}$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 5$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6$$

مشتقة الدالة المركبة (قاعدة السلسلة) Chain Rule :-

* اذا كانت $y = f(u)$ & $u = f(x)$ نجد $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Ex :- جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y = u^2 + 4$ & $u = \sqrt{x+1}$

Sol :- $\frac{dy}{du} = 2u + 0$ & $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow 2u \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{u}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} = 1$$

* اذا كانت $y = f(u)$ & $x = f(u)$ نجد $\frac{dy}{dx}$ من

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \Big/ \frac{dx}{du}$$

Ex :- اذا كانت $y = u^3 + 4u + 3$ & $x = \sqrt{u}$ جد $\frac{dy}{dx}$

Sol :- $\frac{dy}{du} = 3u^2 + 4$ & $\frac{dx}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3u^2 + 4}{\frac{1}{2\sqrt{u}}} = \frac{1}{2}\left(3u^{\frac{3}{2}} + 4u^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[3(x^2)^{\frac{3}{2}} + 4x\right] = \frac{1}{2}(3x^3 + 4x)$$

المشتقة الثانية في الدوال المركبة :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} \quad , x = f(t) \quad , y = f(t)$$

Ex: $X = t - t^2 \quad , \quad y = t - t^3$ جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عندما

Sol:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 2t \quad , \quad \frac{dy}{dt} = 1 - 3t^2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1-3t^2}{1-2t}$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{(1-2t)(-6t) - (1-3t^2)(-2)}{(1-2t)^2} = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

$$= \frac{\frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2}}{\frac{1-3t^2}{(1-2t)}} = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)(1-3t^2)}$$

مشتقة الدالـة الضمنية

الدالــة لاتكون بشكل $y=f(x)$ ، فاذا كان بالامكان جعل (y) في طرف وال (x) بالطرف الاخر وايجاد المشتقة بصورة مباشرة واذا لم تستطيع نشتقة كل متغير وكل مشتقة بالنسبة لـ y مضروبة بـ $\acute{y}$.

Ex :- $y^2 + x^2 = 4$ Find $\frac{dy}{dx}$

* يمكن جعل الدالــة بشكل $y=f(x)$

$$y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{4-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = \boxed{\frac{-x}{y}}$$

* ويمكن حلها بشكل ضمني

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$2x + 2y\acute{y} = 0$$

$$2y\acute{y} = -2x \Rightarrow \acute{y} = \frac{-2x}{2y} = \boxed{\frac{-x}{y}}$$

Ex :- If $xy^2 + x^2y = 1$ Find $\frac{dy}{dx}$

$$x \cdot 2y\acute{y} + y^2 + x^2\acute{y} + y \cdot 2x = 0$$

$$(2xy + x^2)\acute{y} = -y^2 - 2xy$$

$$\acute{y} = \frac{-y^2 - 2xy}{2xy + x^2}$$

Ex: $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$ find y'

Sol: $x^2y' + y\cdot 2x - x\cdot 2yy' - y^2 + 2x + 2yy' = 0$

$$(x^2 - 2xy + 2y)\,y' = -2xy + y^2 - 2x$$

$$y' = \frac{y^2 - 2xy - 2x}{x^2 - 2xy + 2y}$$

Ex: $2x^3 - 3y^2 = 0$ find $\frac{d^2y}{dx^2}$

Sol: $6x^2 - 6yy' = 0$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{6x^2}{6y} = \frac{x^2}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y\cdot 2x - x^2y'}{y^2} = \frac{2xy - x^2\cdot\frac{x^2}{y}}{y^2}$$

$$= \frac{2xy - \frac{x^4}{y}}{y^2} = \frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$$

(H.W)

① $x^2 + y^2 + 6xy + 5 = 0$ find y'

② $x^2 - xy + y^2 = 3$ find y''

③ $f(x) = \frac{2}{1-x}$ Find $\frac{d^2y}{dx^2}$

④ $y = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$ Find $\frac{dy}{dx}$

مشتقة الدالة الاسية :

هنالك نوعين من الدالة الاسية

① $y = e^{f(x)}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

② $y = a^{f(x)}$

$$\frac{dy}{dx} = a^{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} \cdot \ln(a)$$

Ex: Find $\frac{dy}{dx}$ for $y = e^{x^3+8x-7}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^3+8x-7} \cdot (3x^2+8)$$

Ex: Find $\frac{dy}{dx}$ for $y = 5^{7x^4+3x^2+5x-10}$

$$\frac{dy}{dx} = 5^{7x^4+3x^2+5x-10} \cdot (28x^3+6x+5) \cdot \ln(5)$$

Ex: Find $\frac{dy}{dx}$ for $y = x^3 \ln 2x$

$$\frac{dy}{dx} = x^3 \cdot \frac{2}{2x} + \ln 2x \cdot 3x^2 = x^2 + 3x^2 \ln 2x$$

$$x^2(1+3\ln 2x)$$

مشتقة الدوال اللوغاريتمية :-

① دالة اللوغاريتم الطبيعي

$$y = \ln f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

② مشتقة اللوغاريتم الاعتيادي

$$y = \log_a f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{1}{\ln(a)}$$

Ex :- Find $\frac{dy}{dx}$ for the following function.

① $y = \ln(x^3 + 4x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3 + 4x} \cdot (3x^2 + 4)$$

② $y = \log_8 (7x^3 + 8x - 12)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{7x^3 + 8x - 12} \cdot (12x + 8) \cdot \frac{1}{\ln 8}$$

③ $f(x) = \log_5 (x^2 + 5x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+5x} \cdot (2x+5) \cdot \frac{1}{\ln(5)}$$

④ $y = x^x$

$$\ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x \ln x)$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(1+\ln x)$$

$$= x^x (1+\ln x)$$

Ex:

اذا كانت $f(x) = e^{2x} - 4e^x - 12x$ جد قيمة x التي تجعل $f'(x) = 4$

Sol:

$$f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x - 12$$

$$4 = 2e^{2x} - 4e^x - 12$$

$$2 = e^{2x} - 2e^x - 6 \Rightarrow e^{2x} - 2e^x - 8 = 0$$

$$(e^x - 4)(e^x + 2) = 0 \Rightarrow e^x = 4 \quad \text{or} \quad e^x = -2$$ غير ممكن

$$\therefore e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$$

H.W

① $y = \ln \sqrt{\frac{3x}{x^2+1}}$

② اذا كانت $y = \frac{\ln 2x}{e^{2x}+2}$ جد $\frac{dy}{dx}$