الرياضيات

المرحلة الاولى

ترتيب العمليات الجبرية

ترتيب العمليات في الجبر يعتبر أمرًا هامًا لضمان الحصول على الإجابة الصحيحة عند حل المسائل الرياضية .يجب اتباع ترتيب معين لأداء العمليات الرياضية بشكل صحيح.

في هذه المحاضرة، سنتناول المواضيع التالية:

1) قواعد ترتيب العمليات :الضرب والقسمة تأتي قبل الجمع والطرح.
2) استخدام الأقواس والأقواس المزدوجة لتحديد ترتيب العمليات.
3) أمثلة توضيحية لتطبيق ترتيب العمليات في حل المسائل.

a) $3 + 4 \times 2$

الحل:

a) 1. أوجد حاصل الضرب والقسمة أولاً من الشمال إلى اليمين.

$$3 + 4 \times 2 \quad \Rightarrow \quad 3 + 8$$

2. أوجد ناتج حاصل الجمع أو الطرح حسب المطلوبة من الشمال إلى اليمين. **الحل:** 11

القوانين والخطوات السابقة تظل ثابتة لجميع العمليات الجبرية ويجب التعويض أولاً عن قيم الرموز فى المعادلات الجبرية كما هو موضح بالمثال الآتى:

مثال 1.4: أوجد ناتج العمليات الجبرية الآتية:

Example 1.4: Evaluate the following algebraic expression:

a) $x + 2y - \frac{z}{5}$ عندما $x = 5,\ y = 3,\ z = 20$

الحل: a) 1. عوض عن قيم كل رمز من القيم المعطاة:

$$5 + 2(3) - \frac{20}{5}$$

2. قم بعمليات الضرب والقسمة من الشمال إلى اليمين.

3. قم بعمليات الجمع والطرح من الشمال إلى اليمين لتحصل على الناتج 7.

$$5 + 6 - 4 = 7$$

مثال 1.5: أوجد ناتج المعادلات الجبرية الآتية التى تشمل الأقواس:

Example 1.5: Evaluate the following algebraic expression containing parentheses:

a) $2(a+b)+3a-\frac{b}{2}$ إذا كان $a=7,\ b=2.$

الحل: a) 1. عوض عن القيمة المعطاة لكل رمز.

$$2(a+b)+3a-\frac{b}{2} \quad \Rightarrow \quad 2(7+2)+3(7)-\frac{2}{2}$$

2. أوجد قيمة ما بداخل الأقواس: $2(9)+3(7)-\frac{2}{2}$.

3. أوجد ناتج الضرب والقسمة من الشمال إلى اليمين: $18+21-1$

4. أوجد ناتج الجمع والطرح من الشمال إلى اليمين. **الحل:** 38

المعادلات الجبرية البسيطة وطرق حلها

Example 2.3: Solve each equation: **مثال 2.3:** حل كل من المعادلات الآتية:

a) $x + 3 = 8$

b) $5 + y = 13$

c) $x - 10 = 2$

d) $3x = 12$

e) $12y = 3$

f) $\frac{y}{12} = 3$

الحل:

a) $x = 8 - 3$ or 5

b) $y = 13 - 5$ or 8

c) $x = 2 + 10$ or 12

d) $x = \frac{12}{3}$ or 4

e) $y = \frac{3}{12}$ or $\frac{1}{4}$

f) $y = 3 \quad 12$ or 36

حل معادلتين جبريًا باستخدام عمليات الجمع أو الطرح

Solving a Pair of Equations by Addition or Subtraction

لحل المعادلات الجبرية باستخدام عمليات الجمع أو الطرح، نتبع الخطوات الآتية كما هو موضح فى المثال التالى:

حل المعادلة: **Solve:**

$$3x - 7 = y$$
$$4x - 5y = 2$$

خطوات الحل **Procedure**	الحل **Solution**
1. رتب الحدود المتشابهة فى نفس العمود للمعادلتين:	$3x - y = 7$ $4x - 5y = 2$
2. نضرب طرفى المعادلة فى 5: ليكون الناتج:	$(5) \times \quad 3x - y = 7$ $15x - 5y = 35$

3. لحذف معاملات الحدود المتشابهة في القيمة العددية المطلقة للمجهول نتبع الآتى:

a) نجمع إذا كانت الإشارة مختلفة.

b) نطرح إذا كانت الإشارة متشابهة.

$$\begin{array}{r} 15x - 5y = 35 \\ -(4x - 5y = 2) \\ \hline 11x \quad = 33 \end{array}$$

4. أوجد قيمة x من المعادلة ليكون الناتج

$$x = 3$$

5. نعوض عن قيمة $x = 3$ فى المعادلة لإيجاد قيمة y.

$$4x - 5y = 2$$

أى عندما $y = 2$،

$x = 3$ أو $(3, 2)$

$$\begin{aligned} 4x - 5y &= 2 \\ 4(3) - 5y &= 2 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

ملحوظة: لحذف المتغيرات يمكن ضرب كل من المعادلتين بأعداد مختلفة.

حل معادلتين باستخدام التعويض

Solving a Pair of Equations by Substitution

لحل المعادلات بطريقة التعويض نتبع الخطوات الآتية كما هـو موضـع فى المثال التالي:

حل المعادلة: $x - 2y = 7$ Solve:

$3x + y = 35$

خطوات الحل Procedure	الحل Solution
1. نحل المعادلة بواسطة أحد المتغـيرين وذلك بالتعبير عن x بدلالة y:	$x = 2y + 7$
2. نعوض عن المتغـير x بدلالـة y فـى المعادلة الثانية:	$3x + y = 35$ $3(2y + 7) + y = 35$
3. نوجد قيمة المتغير y:	$6y + 21 + y = 35$ $7y = 14$
4. نوجد قيمة y من المعادلة ليكون الناتج:	$y = 2$
5. نوجد قيمة x بالتعويض عـن قيمـة $(x = 2)$ فـى إحـدى المعـادلات الأصلية:	$x = 2y + 7$ $x = 2(2) + 7$ $x = 11$

مسألة 3.4: حل المعادلات الآتية بطريقة التعويض:

Problem 3.4: Solve the substitution:

a) $x - y = 12$
$3x = x - 4y$

b) $x = 2(y - 5)$
$4x + 40 = y - 7$

الحل:

a) $(8,-4)$

b) $(-12,-1)$

التفاضل

التعريف:

التفاضل هو فرع من الرياضيات يهتم بدراسة معدل التغير في الدوال.يُستخدم التفاضل لفهم كيفية تغير قيم الدوال بالنسبة للمتغيرات المستقلة.

أهمية التفاضل في الرياضيات:

-يساعد التفاضل في فهم سلوك الدوال وتحديد نقاط الأقصى والأدنى.

-يُستخدم التفاضل في حساب المعدلات والتغيرات في العديد من المجالات مثل الفيزياء والهندسة.

-يُساعد التفاضل في حل المسائل العملية وتحليل البيانات.

مفهوم المشتقة وكيفية حسابها:

-المشتقة هي معدل التغير لدالة ما، وتُمثلها الرمزية dy/dx أو $f'(x)$ حيث أن $f(x)$ هي الدالة.

-لحساب المشتقة، يُستخدم قواعد التفاضل وقوانينها لإيجاد قوانين تفاضلية لأنواع مختلفة من الدوال.

العلاقة بين التفاضل والتكامل:

-التكامل هو عملية عكسية للتفاضل. إذا كان التفاضل يُستخدم لحساب معدل التغير، فإن التكامل يُستخدم لحساب المجموع الكلي أو المساحة تحت منحنى الدالة.

-هناك علاقة رياضية بين التفاضل والتكامل تُعرف باسم "مبرهنة فنية "تُظهر كيف يمكن استخدام التكامل لحساب قيم الدوال من مشتقاتها.

طرق التكامل

أهداف الوحدة

سيكون الطالب بعد دراستهِ لهذه المادة قادراً على :

5- حل بعض مسائل التكامل التي لا يمكن حلها باستخدام قوانين التكامل العامة.

6- التعرف على كيفية حل تلك المسائل باستخدام طق التكامل بالتجزئة أو التعويض أو الكسور الجزئية ومعرفة الطريقة المثلى لحل أي مسألة.

أولا:التكامل بالتجزئة (integration by parts)

هذه الطريقة تعتمد على قانون حاصل ضرب دالتين(u.v)

$$d(u * v) = u * dv + vdu$$

$$u * dv = d(u * v) - v * du$$

وبأخذ تكامل الطرفين نحصل على

$$\int u * dv = u * v - \int v * du$$

تسمى المعادلة الأخيرة بقاعدة التكامل بالتجزئة

امثلة:- جد تكامل الدوال التالية بطريقة التجزئة

$$1 - \int x.\ln x.dx$$

$$let\ U = \ln x \rightarrow\rightarrow\rightarrow du = \left(\frac{1}{x}\right)dx\,, dv = xdx \rightarrow\rightarrow\rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \int x.\ln x.dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \int \frac{x^2}{2}.\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}.\ln x - \frac{1}{2}\int x.dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$2 - \int x.e^x.dx$$

$$let\ U = x \rightarrow\rightarrow\rightarrow du = dx\,, dv = e^x dx \rightarrow\rightarrow\rightarrow v = e^x$$

$$\therefore \int x.e^x.dx = x.e^x - \int e^x dx = x.e^x - e^x + C$$

المصفوفات: تعريف، أهمية، استخدامات، وخصائص.

المصفوفة هي هيكل بيانات يتم تنظيمه على شكل جدول مكون من صفوف وأعمدة .وتتميز المصفوفات بعدة خصائص منها:

1) الأبعاد :تعبر عن عدد الصفوف والأعمدة في المصفوفة.

2) العناصر :تحتوي المصفوفة على قيم أو عناصر متعددة يمكن الوصول إليها باستخدام مؤشرات الصفوف والأعمدة.

3) التعامل مع البيانات :يمكن تخزين مجموعة كبيرة من البيانات في المصفوفات والقيام بعمليات معالجة وتحليل على هذه البيانات بشكل فعال.

4) الإستخدام المرن :يمكن استخدام المصفوفات في العديد من التطبيقات مثل تخزين البيانات، إجراء العمليات الحسابية، وتمثيل البعد المتعدد في البرمجة.

باختصار، المصفوفات توفر وسيلة فعالة لتنظيم وتخزين البيانات في شكل جدولي والقيام بالعديد من العمليات عليها بسهولة.

المصفوفة Matrix: عبارة عن مجموعة من الاعداد الحقيقية أو المعقدة أو منهما معاً مرتبة على شكل صفوف واعمدة بشكل مستطيل .

المصفوفة التي تملك m من الصفوف و n من الاعمدة تدعى مصفوفة من الدرجة $m \times n$ وتكتب بالشكل

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فمثلاً المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ \sqrt{3} & 2+i & 4 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة من الدرجة 2×3 .

اذا كانت $\begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ \ln 4 & 2 & e^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ فان

$$a_{11} = 1 \,, a_{12} = -3 \,, a_{13} = \sqrt{2} \,, a_{21} = \ln 4 \,\,, a_{22} = 2 \,, a_{23} = e^3$$

جمع وطرح المصفوفات : لجمع أو طرح مصفوفتين أو أكثر فاننا نجمع أو نطرح العناصر المتناظرة وفي هذه الحالة يجب ان تكون المصفوفات من الدرجة ذاتها فمثلاً

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 4 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+(-5) & -2+1 \\ 0+(-3) & 1+4 \\ 4+(-6) & 3+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-(-2) \\ 2-1 \\ 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ضرب مصفوفة بثابت : اذا ضُربت مصفوفة بثابت معين c فان جميع عناصرها تُضرب بهذا الثابت فمثلاً

$$2\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 3 & 2\times(-2) \\ 2\times 0 & 2\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ضرب مصفوفتين : يمكن ضرب مصفوفتين اذا كان عدد الاعمدة في الاولى يساوي عدد الصفوف في الثانية فاذا كانت المصفوفة A من الدرجة $m \times n$ والمصفوفة B من الدرجة $n \times r$ فان المصفوفة $C = A.B$ تكون من الدرجة $m \times r$ ويمكن التعبير عن حاصل ضرب المصفوفتين A و B كما يلي :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

حيث c_{ij} عنصر في المصفوفة C و $i = 1,2,3,\cdots,m \quad and \quad j = 1,2,3,\cdots,r$

ان عملية ضرب مصفوفتين ليست ابدالية اي انه ليس من الضروري ان يكون $A.B = B.A$

مثال (١) جد $B.A$ و $A.B$ (ان أمكن) اذا كان $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & -\sqrt{2} & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & \sqrt{2}\\ 4 & -3\end{bmatrix}$

$$A.B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & -\sqrt{2} & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & \sqrt{2}\\ 4 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\times 3+0\times(-2)+1\times 4 & 2\times(-1)+0\times\sqrt{2}+1\times(-3)\\ -4\times 3+(-\sqrt{2})\times(-2)+5\times 4 & -4\times(-1)+(-\sqrt{2})\times\sqrt{2}+5\times(-3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & -5\\ 8+2\sqrt{2} & -13\end{bmatrix}$$

$$B.A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -2 & \sqrt{2}\\ 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & -\sqrt{2} & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\times 2+(-1)\times(-4) & 3\times 0+(-1)\times(-\sqrt{2}) & 3\times 1+(-1)\times 5\\ (-2)\times 2+\sqrt{2}\times(-4) & (-2)\times 0+\sqrt{2}\times(-\sqrt{2}) & (-2)\times 1+\sqrt{2}\times 5\\ 4\times 2+(-3)\times(-4) & 4\times 0+(-3)\times(-\sqrt{2}) & 4\times 1+(-3)\times 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & \sqrt{2} & -2\\ -4-4\sqrt{2} & -2 & -2+5\sqrt{2}\\ 20 & 3\sqrt{2} & -11\end{bmatrix}$$

مبدلة المصفوفة Transpse of a Matrix:

اذا كانت لدينا المصفوفة A من الدرجة $m \times n$ فان مبدلة A تكون من الدرجة $n \times m$ ويرمز لها بالرمز A^T

ويمكن الحصول عليها بابدال الصفوف بالاعمدة فمثلاً اذا كانت لدينا

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \quad \text{فان} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{bmatrix}$$

<u>مصفوفات خاصة Special Matrices</u>

المصفوفة المربعة Square Matrix:

وهي مصفوفة من الدرجة $m \times m$ اي تتساوى فيها عددالصفوف مع الاعمدة كالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 9 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة القطرية Diagonal Matrix:

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي كالمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفة التا فهة Null Matrix:

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ونكتب $A = 0$

* اذا كان $A.B = 0$ فليس من الضروري ان تكون احدى المصفوفتين صفراً فمثلاً اذا كانت

$B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$ فان $A.B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2+4-6 & 18-6-12 \\ 6+12-18 & 54-18-36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الوحدة Unit Matrix:

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي فانها تساوي 1 ونرمز لها بالرمز I

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* ان حاصل ضرب مصفوفة الوحدة باي مصفوفة اخرى من نفس الدرجة يساوي المصفوفة نفسها اي $A.I =$

$I.A = A$

المحددة للمصفوفة المربعة Determinant of Square Matrix :

اذا كانت A مصفوفة مربعة فانها تمتلك محددة ونرمز لها بالرمز $det(A)$ أو $|A|$ وتحسب كما يلي

* اذا كانت A من الدرجة 2×2 و $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ فان $det(A) = a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$

** اذا كانت A من الدرجة 3×3 و $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ فان

$$det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22} \times a_{33} - a_{32} \times a_{23}) - a_{12}(a_{21} \times a_{33} - a_{31} \times a_{23})$$

$$+ \mathrm{a}_{13}(\mathrm{a}_{21} \times \mathrm{a}_{32} - \mathrm{a}_{31} \times \mathrm{a}_{22})$$

المرافق Cofactor

لتكن A مصفوفة مربعة فان لكل عنصر من عناصرها مرافق A_{ij}

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, det(M_{ij})$$

حيث $det(M_{ij})$ هي المحددة الناتجة من المصفوفة A وذلك بحذف الصف i والعمود j

فمثلاً في المصفوفة $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ ، العامل المرافق للعنصر 2 هو

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\, det(M_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-9) = 9$$

منقول المصفوفة **Adjoint of Matrix**

ان منقول المصفوفة المربعة A هي المبدلة لمصفوفة مرافقات A ويرمز لها بالرمز $adj(A)$

مثال (٣) جد $adj(B)$, $adj(A)$ للمصفوفتين في المثال (٢)

الحل

$$A_{11} = (-1)^{1+1}(4) = 4 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}(2) = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}(1) = -1 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}(3) = 3$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 30 \quad B_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 24 \quad B_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -48$$

$$B_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -10 \quad B_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 27 \quad B_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$$

$$B_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad B_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -15 \quad B_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 30$$

$$C = \begin{bmatrix} 30 & 24 & -48 \\ 10 & 27 & -4 \\ 0 & -15 & 30 \end{bmatrix}$$

$$adj(B) = C^T = \begin{bmatrix} 30 & 10 & 0 \\ 24 & 27 & -15 \\ -48 & -4 & 30 \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة Inverse of Matrix

لتكن A مصفوفة مربعة يحيث ان $det(A) \neq 0$ فان معكوس A يُرمز له بالرمز A^{-1} يُحسب من القاعدة التالية :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

مثال (٤) جد B^{-1} , A^{-1} للمصفوفتين في المثال (٢)

الحل :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{det(B)} adj(B) = \frac{1}{150}\begin{bmatrix} 30 & 10 & 0 \\ 24 & 27 & -15 \\ -48 & -4 & 30 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

لاحظ في المثال السابق

$$A.A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 12-2 & -3+3 \\ 8-8 & -2+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ويترك تحقيق $B.B^{-1} = B^{-1}.B = I$ كتمرين للطالب .

Solution 0f a set of linear equations حل مجموعة المعادلات الخطية

ليكن لدينا نظام المعادلات التالي

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

يمكن تمثيله باستعمال المصفوفات كما يلي

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ونكتب $A.X = B$ حيث $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

ولحل هذا النظام نضرب طرفي المعادلة بـ A^{-1}

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \quad \rightarrow \quad I.X = A^{-1}.B \quad \rightarrow \quad X = A^{-1}.B$$

تمارين

١. اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 7 \\ 9 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ فجد $A - B$, $A + B$

٢. اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 8 & 0 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ فجد $3A$, $A.B$, $B.A$

٣. اذا كانت $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ فجد $\sqrt{2}B$, $A.B$, $B.A$

٤. جد معكوس المصفوفات $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

٥. جد مجموعة الحل لانظمة المعادلات التالية :

(a) $x + 2y + z = 4$, $3x - 4y - 2z = 2$, $5x + 3y - 5z = -1$

(b) $2x - y + 3z = 2$, $x + 3y - z = 11$, $2x - 2y + 5z = 3$