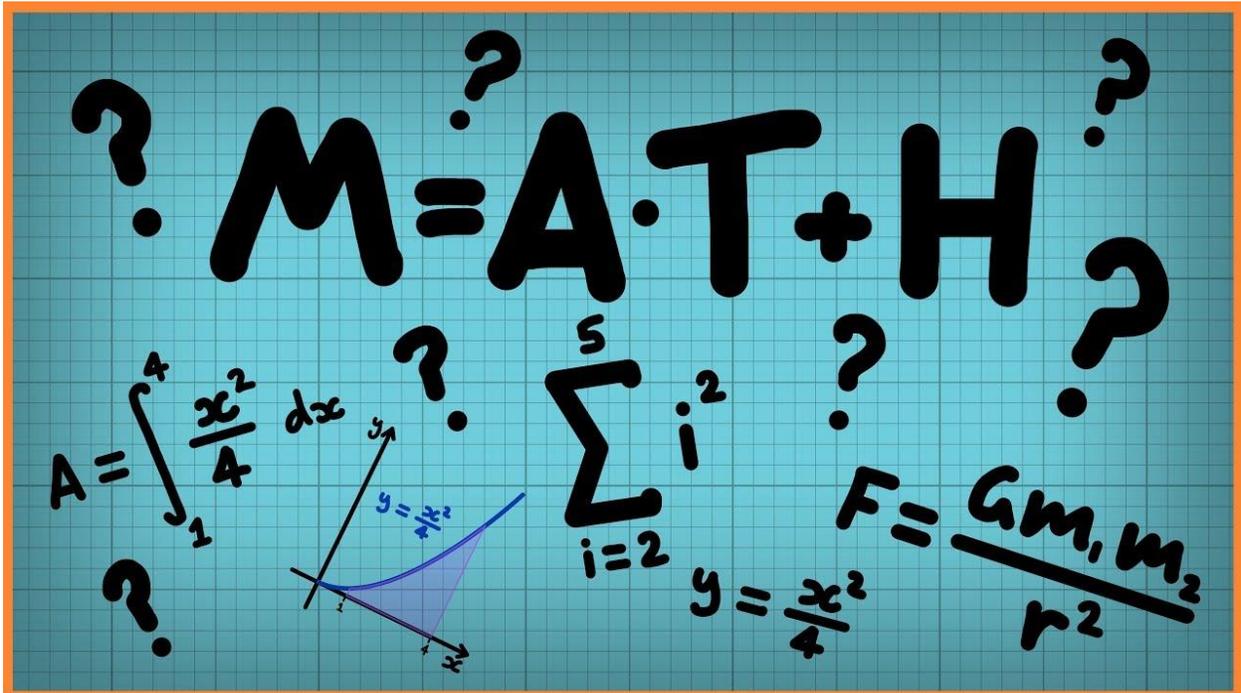




Al-Furat Al-Awsat Technical University

Najaf Technical Institute

Department of Electrical techniques



Lecturer :Mohammed F. Yousif

1st stage

الرياضيات التطبيقية

☆ المصفوفات والمحددات Matrixes and determinants ☆

المصفوفة: المصفوفة هي عبارة عن مجموعة من الأعداد مرتبة على شكل مستطيل . وسنفرض جميع المدخلات في المصفوفة على أنها تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية والمعقدة يُرمز للمصفوفة بالرموز A,B,C,..... ومُدخلات المصفوفة بالرمز a_{ij} :

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

مدخلات المصفوفة المصفوفة

حيث: m ← صف
n ← عمود

Row الصف → $i = 1, 2, 3, \dots, m$

Column العمود → $j = 1, 2, 3, \dots, n$

تسمى المصفوفة مربعة اذا كانت المصفوفة A من السعة $m \times n$ واذا كان $m = n$ (أي ان عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة)

Example:(1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

أنواع المصفوفات Diagonal Matrix (المصفوفة القطرية)

المصفوفة القطرية: تسمى المصفوفة قطرية عندما جميع عناصر قطرها متساوية ولها قيمة ثابتة (C) Constant حيث ان $a_{ij} = c$ لكل $i = j$

Example:(2)

القطر الرئيسي

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

القطر الثانوي

المصفوفة الصفرية: Zero Matrix أو Null Matrix

وهي المصفوفة التي يكون جميع مدخلاتها أصفار

☞ Example:(3)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

المصفوفة الوحدة : Identity Matrix

هي المصفوفة التي يكون جميع عناصر قطرها الرئيسي واحد والباقي اصفار . ونرمز لها بالرمز I .

☞ Example:(4)

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} ; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

المصفوفة المثلثية : Triangular Matrix

i- المصفوفة المثلثية العليا: وهي المصفوفة التي تكون جميع المدخلات الواقعة تحت القطر الرئيسي تكون اصفار .

☞ Example:(5)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 3} ; \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

ii- المصفوفة المثلثية السفلى: وهي المصفوفة التي تكون جميع مدخلاتها فوق القطر الرئيسي اصفار .

☞ Example:(6)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

مُدور المصفوفة : Transpose of Matrix

وهي تغيير أعمدة المصفوفة بدل صفوفها أو تغيير الصفوف بدل الأعمدة

☞ Example:(7)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3} ; \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

المصفوفة المنفردة :

هي المصفوفة التي تكون قيمتها محددها يساوي صفر ، مثال تمرين (15) .

المصفوفة غير المنفردة :

هي المصفوفة التي تكون قيمتها محددها لا تساوي صفر ($\neq 0$)

Example: (8)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

قيمة المحدد $|A| = 2 * 5 - 1 * 4 = 10 - 4$

$$\therefore |A| = 6$$

ان هذه المصفوفة غير منفردة لان قيمتها محددها (6) أي لا يساوي صفر

Example: (9)

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

؛ $|B| = 3 * 4 - 2 * 6$
 $= 12 - 12 = 0$

المصفوفة منفردة لان قيمتها محددها يساوي صفر

طريقة إيجاد قيمة المحدد لمصفوفة من السعة 2*2:

القطر الثانوي القطر الرئيسي

$$D_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

نوجد قيمة المحدد كما يلي : حاصل ضرب القطر الأول الرئيسي مطروحاً منه حاصل ضرب القطر الثانوي

$$\therefore D_2 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

D_2 يسمى محدداً من الدرجة الثانية

المحددات للمصفوفات : Determinants

القيمة العددية للمصفوفات

المحدد : هي مجموعة عناصرها تكتب على شكل صفوف وأعمدة رباعي الشكل ويكون محصور

بين مستقيمين شاقوليين ويرمز له بالرمز $|A|$ أو $\det. A$ أو D

☞ **Example:(10)** Find the value of the following determinant

جد قيمة ما يلي للمحددات :

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

سالب موجب

$$|A| = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 4$$

$$= 18 - 8 = 10$$

أي إن القطر المتجه نحو اليمين (القطر الرئيسي) يكون موجب بينما يكون القطر المتجه نحو اليسار (القطر الثانوي) سالب

☞ مثال: جد قيمة X إذا كان

$$A = \begin{vmatrix} X & 4 \\ 1 & X \end{vmatrix} = 0$$

Solution :

$$X^2 - 4 = 0$$

$$\therefore X^2 = 4$$

$$\therefore X = \pm 2$$

الحل:

😊 بعض العمليات الجبرية على المصفوفات:

الجمع والطرح Addition and subtraction

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 & a_4 - b_4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

by constant

ضرب المصفوفة * ثابت

☞ **Example:(11)** Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{And } C=3 \quad \text{Find } C \cdot A$$

Solution :

الحل:

$$C \cdot A = 3 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 54 = -54$$

✍ **Example:(12)** Find $|2*A| + |3*B|$ IF :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solution :

الحل:

$$|2*A| = 2* \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 12 - 0 = 12$$

$$|3*B| = 3* \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = 0 - (-6*3) = 18$$

$$\therefore |2*A| + |3*B| = 12 + 18 = 30$$

✍ **إيجاد المحددات لمصفوفة من السعة 3*3:**

هناك عدة طرق لإيجاد المحددات من السعة 3*3

الطريقة الأولى : الطريقة الخاصة أو طريقة التدوير (Rotate)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3*3}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

وتطبق هذه الطريقة حسب الخطوات التالية :

نكرر كتابة العمودين الأول والثاني بالترتيب إلى يمين المحدد

إيجاد المجموع الجبري لنتائج ضرب عناصر الأقطار الموجبة والسالبة كما هو مبين في الأسهم (أعلاه) وكما يلي :

$$|A| = (a_{11})(a_{22})(a_{33}) + (a_{12})(a_{23})(a_{31}) + (a_{13})(a_{21})(a_{32}) - (a_{13})(a_{22})(a_{31}) - (a_{11})(a_{23})(a_{32}) - (a_{12})(a_{21})(a_{33})$$

الطريقة الثانية (طريقة التجزئة)

لإيجاد قيمة المحدد يجب ملاحظة قانون الإشارات أو (قاعدة الإشارات) المبينة أدناه للعناصر

داخل المحدد بغض النظر عن إشارة العنصر نفسه

يُفتح المحدد بستة طرق وكالاتي :

باستخدام الصف الأول

باستخدام الصف الثاني

باستخدام الصف الثالث

باستخدام العمود الأول

باستخدام العمود الثاني

باستخدام العمود الثالث

★ ملاحظة ★: تكون إشارة العنصر الأول في الصف الأول والعمود الأول ثابتة في حين تكون بقية العناصر فيما يتعلق بالصف الأول والعمود الأول مخالفة للعنصر الذي يسبقها بالإشارة.

● قاعدة الإشارات ●

	العمود الأول	العمود الثاني	العمود الثالث	$i+j$ $(-1)^{i+j}$ رقم الصف = i رقم العمود = j
R1 الصف الأول	+	-	+	
R2 الصف الثاني	-	+	-	
R3 الصف الثالث	+	-	+	

$$\text{Ex} (-1)^{+1} = (-1)^2 = +1$$

☛ **Example:(13)** Find the value of the det .A

جد قيمة المحدد التالي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Solution :

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 & 7 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= (1)(5)(9) + (2)(6)(7) + (3)(-4)(-8) \\ &\quad - (3)(5)(7) - (1)(6)(-8) - (2)(-4)(9) \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 + 48 + 72 \\ \therefore |A| &= 240 \end{aligned}$$

☛ **Example:(14)** Find the value of the det .A

جد قيمة المحدد التالي

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Solution :

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -5 & 4 & -2 & -5 \\ 2 & 8 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (2 \cdot 0 \cdot -1) + (-5 \cdot 7 \cdot 0) + (4 \cdot 2 \cdot 1) - (4 \cdot 0 \cdot 0) - (-2 \cdot 7 \cdot 1) - (-5 \cdot 2 \cdot -1)$$

$$\therefore |A| = 0 + 0 + 8 - 0 + 14 - 10$$

$$\therefore |A| = 12$$

Example:(15) Find the value of the det .A

جد قيمة المحدد التالي بطريقة التجزئة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

الحل بالنسبة للصف الأول :

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2(-7 + 36) - 3(35 - 18) - 4(-30 + 3)$$

$$|A| = 2(29) - 3(17) - 4(-27)$$

$$|A| = 58 - 51 + 108 = 115$$

الحل بالنسبة للصف الثاني :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -5 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -5(21 - 24) - (14 + 12) - 6(-12 - 9)$$

$$|A| = 15 - 26 + 126 = 115$$

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد قيمة المحدد

Example:(16) Find the value of the det .A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solution :

الحل:

$$|A| = 1 * \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 * \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 * \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -1 - 1 + 4 = 2$$

★ ملاحظة ★ :

ان طريقة تفيد في حل المحددات من الدرجة الرابعة والخامسة . وبذلك يمكن دمج الطريقتين :
طريقة التجزئة مع الطريقة الخاصة (طريقة التدوير) لحل محدد من الدرجة الرابعة .

1- المعادلات الخطية :

☞ Example(1): Solve the linear equations

☞ مثال : حل النظام الخطي بعدة طرق

$$x + y = 4 \quad \dots(1)$$

$$3x - 2y = 2 \quad \dots(2)$$

الطريقة الأولى : طريقة الحذف وكما يلي :

نضرب المعادلة (1) *3 والمعادلة (2) * -1 ينتج :

$$3x + 3y = 12 \quad \dots(1)$$

$$-3x + 2y = -2$$

بالجمع

$$5y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{5} = 2$$

$$\therefore y = 2$$

نعوض عن قيمة y في المعادلة ينتج :

$$\therefore y = 2$$

$$x = 2 , y = 2$$

الحل باستخدام المصفوفة

$$R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نضرب الصف الأول *3

$$R_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ب طرح الصف الثاني من الصف الأول

$$R_1 - R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \therefore 5y = 10 \Rightarrow \therefore y = 2$$

$$\therefore x = 2$$

حل النظام هو x=2

Y=2

👑 نظرية أو قاعدة كرامر Gramer's Rule 👑

لتكن $AX=B$ نظام من المعادلات الخطية التي رتبته $n \times n$ وتحتوي على n من المجاهيل بحيث ان محددها $|A| \neq 0$ عندئذ يكون للنظام حل وحيد أي ان :

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, X_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \dots, X_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

📖 **Example(2):** Find the solution of x, y by using Gramer's Rule

استخدم قاعدة كرامر لحل نظام المعادلات :

$$2x - 3y = 8 \quad \dots(1)$$

$$3x + y = 1 \quad \dots(2)$$

Solution :

الحل:

اجعل النظام بشكل صيغة مصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

* نستخرج المحدد الأصلي للمصفوفة (D)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cdot 1) - (-3 \cdot 3) \\ = 2 + 9 = 11$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (8 \cdot 1) - (-3 \cdot 1) \\ = 8 + 3 = 11$$

نستخرج المحدد (D_2) وذلك بحذف العمود الثاني والتعويض عنه بالعمود الثالث (عمود الحدود المطلقة) وكمالي :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_2 = 2 - 24$$

$$\therefore D_2 = -22$$

$$x = \frac{|D_1|}{|D|} = \frac{11}{11} = 1$$

$$y = \frac{|D_2|}{|D|} = \frac{-22}{11} = -2$$

$$\therefore x = 1, y = -2$$

:Proof 🤔 التحقيق

نعوض عن قيم x, y في المعادلتين أعلاه ينتج

$$2 + 1 - 3(-2) = 8$$

$$2 + 6 = 8$$

$$8 = 8$$

مثال (3): استخدام قاعدة كرامر لحل المعادلات الخطية

$$x - y = 1$$

$$x - z = 3$$

$$y + z = 8$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad z = \frac{D_3}{D}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} a$$

$$D = 1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1(0+1) + 1(1) + 0 = 1+1 = 2$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1(1)(3+8) + 0 = 1+11 = 12$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= 1(3+8) - 1(1) = 11-1 = 10$$

$$\therefore D_2 = 10$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1(0-3) + 1(8) + 1(1)$$

$$= -3 + 8 + 1 = 6$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{12}{2} = 6, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{10}{2} = 5, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{6}{2} = 3$$

☛ **Example(4):** Find the solution of x, y, z by using Gramer's Rule

(استخدم قاعدة كرامير ليجاد قيم x, y, z)

$$4x + y + z = 5 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$3x + y + 4z = 10 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$x + y + z = 2 \quad \dots\dots\dots(3)$$

Solution :

الحل:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = 4 + 4 + 3 - 1 - 16 - 3 = -9 \Rightarrow \therefore D = -9$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = 5 + 8 + 10 - 2 - 20 - 10 = -9 \Rightarrow \therefore D_1 = -9$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = 40 + 20 + 6 - 10 - 32 - 15 = 9 \Rightarrow \therefore D_2 = 9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore x = \frac{D_1}{D} = \frac{-9}{-9} = 1, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{9}{-9} = -1, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{-18}{-9} = 2$$

Example(5): Find the value of x

جد قيمة x

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2x^2 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

Solution :

الحل:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2x^2 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2x^2 & -x \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$4x - 1 + 4x^2 - 2x - 4 + 2x^2 = 0$$

$$6x^2 + 2x - 5 = 0$$

a b c

* المعادلة الناتجة هي معادلة من الدرجة الثانية لذلك نستخدم طريقة الدستور لحل هذه المعادلة

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

قانون الدستور

حيث : a=6 , b=2 , c=-5

$$\therefore x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(6)(-5)}}{2(6)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 120}}{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{124}}{12}$$

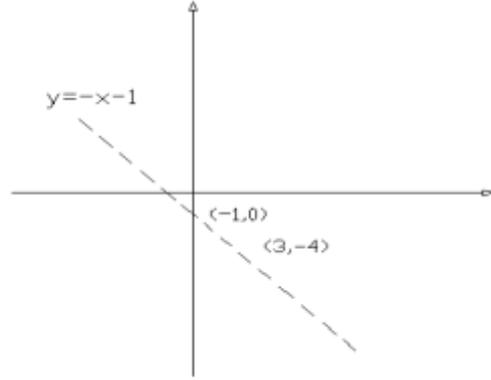
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 * 31}}{12} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{31}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{6}$$

$$\therefore \text{if } x = \frac{-1 - \sqrt{31}}{6} \text{ or } x = \frac{-1 + \sqrt{31}}{6}$$

مثال (6): اثبت ان حل المحدد التالي هو عبارة عن معادلة خط مستقيم يمر بالنقاط

(-1,0), (3,-4) مع الرسم ؟

x	y
0	-1
1	-2
-1	0



$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Solution :

الحل:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$-4x - y + 0 - 4 - 0 - 3y = 0$$

$$-4x - 4y - 4 = 0$$

$$x + y + 1 = 0$$

بالقسمة على -4 - ينتج :

معادلة المستقيم ←

نعوض في النقاط (-1,0) ينتج :

$$(-1,0) \Rightarrow -1 + 0 + 1 = 0$$

النقطة (3,-4) ينتج :

$$(3, -4) \Rightarrow 3 - 4 + 1 = 0$$

تمارين تطبيقية :-

1) $3x + 3y = 2$

$$\begin{aligned} 6x + 3y &= 1 & \Rightarrow x &= -\frac{1}{3} \\ & & y &= 1 \end{aligned}$$

2) $3x - y = 2$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 & \Rightarrow x &= -\frac{1}{3} \\ & & y &= -3 \end{aligned}$$

3) $3x + 4y = 11$

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 3 & \Rightarrow x &= 1 \\ & & y &= 2 \end{aligned}$$

4) $3x = 5 + y$

$$\begin{aligned} -x &= 2 - 4y & \Rightarrow x &= 2 \\ & & y &= 1 \end{aligned}$$

5) if $A = \begin{bmatrix} 5 & y \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ x^2 - 1 & 2 \end{bmatrix}$

and if $[A] = [B]$ Find the value of x and y

6) find the value of k by det.

$$\begin{bmatrix} 2k & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & k \end{vmatrix}$$

7) if $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & y \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} x^2 - 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

and if $[A] = [B]$ Find the value of x and y

8) Find the value of a, b, c if

$$\begin{bmatrix} 5b+1 & 0 \\ 3c & 8 \\ -3 & 2a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 9 & 8 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$9) \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{bmatrix} = 0 \text{ Find the value of } x \text{ and}$$

proof has roots $x = 2, x = -3$

10) Find the determinant of order A, B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 6 \quad \Rightarrow |B| = -2$$

$$11) \begin{cases} x = 1 - y - 2z \\ 2x - y - z = 0 \\ x + 2y = 4 + z \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ By Cramer's Rule}$$

12) Find the value of x, y, z by Cramer's Rule

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + z - y = 6 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + z = 7 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

استخدم المحدد الرباعي لإيجاد قيمة t, z, y, x باستخدام قاعدة كرامر

$$14) \begin{cases} 2x + 3t - y = -3 \\ t + 2z + x - 3 = 0 \\ 3y - 3z + 2t = -13 \\ 4x + 3y + 2z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} |A| = 105 \\ |A_1| = 105 \\ |A_2| = 105 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y + 2z = 12 \\ 3z + 2y + 3x = 16 \end{cases} \quad \Rightarrow |A| = 0$$

$$16) 3x + 5y = 1 - z \quad x = \frac{3}{5}$$

$$4x + y = 2 + z \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{5}$$

$$5x - y = 3 + z \quad z = \frac{1}{5}$$

$$17) x_1 + x_2 + x_3 = 4 \quad x_1 = 5$$

$$2x_3 + 3x_2 + 2x_1 = 5 \quad \Rightarrow x_2 = -3$$

$$3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -3 \quad x_3 = 2$$

$$18) x = 2 + y$$

$$2y = x - z + 1$$

$$2z = -2 - y$$

$$19) 3x + 2y - z = 4 \quad x = 1$$

$$-x + 4y + z = 10 \quad \Rightarrow y = 2$$

$$x + y + z = 6 \quad z = 3$$

أوجد قيمة المحدد الثلاثي باستخدام طريقة التجزئة

20)

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -24$$

$$|B| = -49$$

$$21) i) x + 2z = 1$$

$$y = -z - 1$$

$$x = -y + z + 2$$

$$ii) 2x + y - z = 4$$

$$y + z = 5$$

$$x - 2y = 1$$

أوجد قيمة المحدد الثلاثي باستخدام طريقة التجزئة والتدوير

22)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 13$$

$$|B| = -42$$

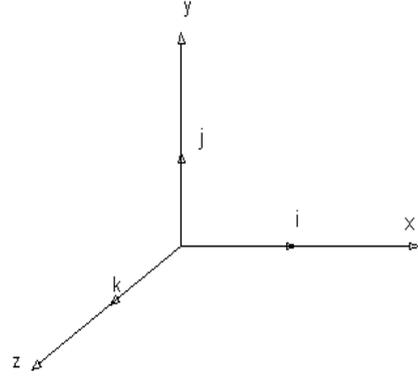
♣ Vectors and Scalars : المتجهات والقيم العددية ♣

تسمى الكميات التي لها مقدار عددي وليس لها اتجاه بالقيم العددية (وتكون غير اتجاهيه) مثل الطول ، الزمن ، درجة الحرارة ، المساحة الخ.

أما الكميات التي لها مقدار عددي واتجاه تسمى بالمتجهات Vectors مثل القوة \vec{F} (Force) والسرعة \vec{v} (Velocity) والتعجيل \vec{a} (acceleration)

ويرمز للمتجهات بالرموز $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{V}, \dots$ ولكل متجه ثلاثة متغيرات هي i, j, k ويكتب

$$\vec{A} = a_1i + a_2j + a_3k$$



✎ Example:

$$\vec{A} = 1i + 2j + 3k$$

حيث ان a_3, a_2, a_1 هي قيم معلومة كما في المثال اعلاه .

♠♠ العمليات الجبرية على المتجهات ♠♠ :

الجمع والطرح .

ضرب المتجه في عدد ثابت.

إيجاد طول المتجه.

إيجاد متجه الوحدة العمودي \vec{u} لمتجه واحد.

إيجاد قيمة الضرب الديكارتي $\text{Cros}(x)$.

إيجاد قيمة متجه الوحدة العمودي \vec{u} بين متجهين (\vec{A}, \vec{B}) .

إيجاد قيمة الزاوية (θ) بواسطة استخدام قانون Sin

إيجاد الضرب العددي (Dot) وإيجاد الزاوية (θ) بواسطة Cos

✎ Example:

ليكن \vec{A}, \vec{B} متجهين هما

$$\vec{A} = 2i + 3j + 4k$$

$$\vec{B} = i + j + k$$

$$\text{أوجد } \vec{A} + \vec{B} \quad -1 \quad \vec{A} - \vec{B} \quad -2 \quad 3\vec{B}, 5\vec{A} \quad -3 \quad |\vec{B}|, |\vec{A}| \quad -4 \quad u(\vec{B}), u(\vec{A}) \quad -5$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \quad -10 \quad \theta(\vec{A}, \vec{B}) \quad -9 \quad u(\vec{A}, \vec{B}) \quad -8 \quad |\vec{A} \times \vec{B}| \quad -7 \quad \vec{A} \times \vec{B} \quad -6$$

$$1- \bar{A} + \bar{B}$$

$$\bar{A} = 2i + 3j + 4k$$

$$\bar{B} = i + j + k$$

$$\bar{A} + \bar{B} = 3i + 4j + 5k$$

$$2- \bar{A} - \bar{B}$$

$$\bar{A} = 2i + 3j + 4k$$

$$\bar{B} = i + j + k$$

$$\bar{A} - \bar{B} = 1i + 2j + 3k$$

3-

* صيغة القانون

$$\bar{A} = a_1i + a_2j + a_3k$$

$$\bar{B} = b_1i + b_2j + b_3k$$

$$\bar{A} \pm \bar{B} = (a_1 \pm b_1)i \pm (a_2 \pm b_2)j \pm (a_3 \pm b_3)k$$

3-

$$5\bar{A} = (5 \times 2)i + (5 \times 3)j + (5 \times 4)k$$

$$= 10i + 15j + 20k$$

$$3\bar{B} = 3i + 3j + 3k$$

$$c\bar{A} = ca_1i + ca_2j + ca_3k$$

* صيغة القانون (C) هو عدد ثابت (constant)

4-

$$|\bar{A}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29} = 5.385$$

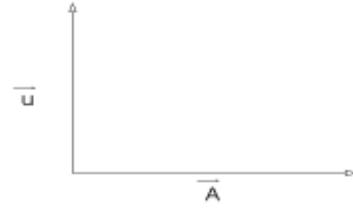
$$|\bar{B}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} = 1.732$$

$$|\bar{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

* صيغة القانون :

دائماً الطول للمتجه يكون موجب اذا كان أي قيمه (-) لأن (-)² = +

$$5- \bar{u}(\bar{A}) = \frac{2i+3j+4k}{\sqrt{29}}$$



$$\bar{u}(\bar{A}) = \frac{2}{\sqrt{29}}i + \frac{3}{\sqrt{29}}j + \frac{4}{\sqrt{29}}k$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{B}) &= \frac{i+j+k}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k \end{aligned}$$

✳متجه الوحدة

$$\bar{u} = \frac{\bar{A}}{|\bar{A}|} = \frac{a_1i+a_2j+a_3k}{|\bar{A}|}$$

* صيغة القانون :

$$= \frac{a_1}{|\bar{A}|}i + \frac{a_2}{|\bar{A}|}j + \frac{a_3}{|\bar{A}|}k$$

✳الضرب بطريقة (cros)

$$6- \bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

لحل هذا المحدد نستخدم طريقة التجزئة

$$\begin{aligned} \bar{A} \times \bar{B} &= i \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= i(3-4) - j(2-4) + k(2-3) \\ &= -i + 2j - k \end{aligned}$$

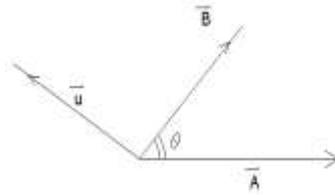
$$7- |\bar{A} \times \bar{B}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

✳ صيغة القانون :

$$\begin{aligned} \bar{A} \times \bar{B} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= i \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= i(a_2b_3 - a_3b_2) - j(a_1b_3 - a_3b_1) + k(a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

$$8- \bar{u}(\bar{A}, \bar{B}) = \frac{\bar{A} \times \bar{B}}{|\bar{A} \times \bar{B}|}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{A}, \bar{B}) &= \frac{-\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}}{\sqrt{6}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{6}}\bar{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\bar{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{k} \end{aligned}$$



$$9- \theta(\bar{A}, \bar{B})$$

لاستخراج الزاوية θ حسب قانون الضرب ألتجاهي (الديكارتي)

$$|\bar{A} \times \bar{B}| = |\bar{A}| |\bar{B}| \sin \theta$$

$$\sqrt{6} = \sqrt{29} \times \sqrt{3} \cdot \sin \theta$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29} \times \sqrt{3}} = \sin \theta$$

$$\sin^{-1} \cdot \sin \theta = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29} \times \sqrt{3}} \right)$$

$$\therefore \theta = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29} \times \sqrt{3}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{2.449}{9.327} \right)$$

$$= \sin^{-1} (0.2626)$$

$$\theta = 15^\circ.22$$

$$10- \bar{A} \cdot \bar{B}$$

الضرب العددي : أي يكون الناتج دائماً عبارة عن عدد (Dot)

$$\bar{A} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$$

$$\bar{B} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = (2 \times 1) + (3 \times 1) + (4 \times 1)$$

$$= 2 + 3 + 4 = 9$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = |\bar{A}| |\bar{B}| \cos \theta$$

$$9 = \sqrt{29} \times \sqrt{3} \cdot \cos \theta$$

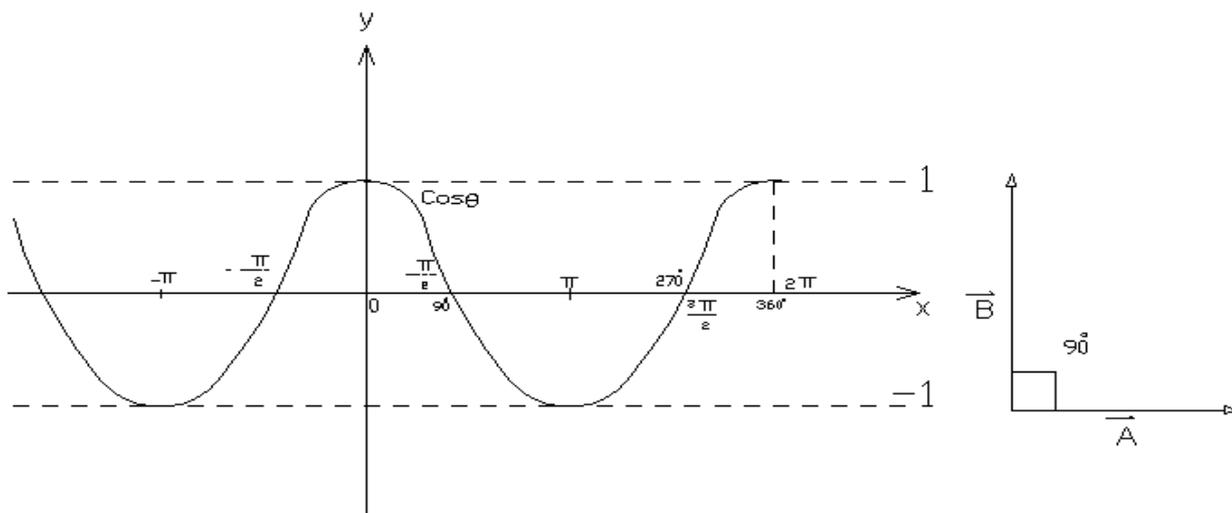
$$\cos \theta = \left(\frac{9}{\sqrt{29} \times \sqrt{3}} \right)$$

$$\therefore \cos^{-1} \cdot \cos \theta = \cos^{-1} \left(\frac{9}{\sqrt{29} \times \sqrt{3}} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{9}{\sqrt{29} \times \sqrt{3}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{9}{9.327} \right)$$

$$\therefore \theta = \cos^{-1} (0.965) = 15^\circ.22$$

★ إذا كان المتجهين \bar{A}, \bar{B} متعامدين فإن الزاوية تكون 90° وتكون قيمة $\cos(90^\circ) = 0$



Example:

$$\vec{A} = i + j + k$$

$$\vec{B} = 2i - j - k$$

$$\vec{C} = 2i + 3j + 5k$$

Find:

- 1- $\vec{A} + \vec{B}$ 2- $|2\vec{A} - 3\vec{C}|$ 3- $|\vec{A} \times \vec{B}|$ 4- $\vec{A} \cdot \vec{B}$ 5- $\theta(\vec{A}, \vec{B})$ 6- $\bar{u}(\vec{A}, \vec{B})$

Or أثبت إن المتجهين متعامدان.

1- $\vec{A} + \vec{B}$

$$\begin{aligned} \vec{A} + \vec{B} &= 3i + (1-1)j + (1-1)k \\ &= 3i + 0 \cdot j + 0 \cdot k \\ &= 3i \end{aligned}$$

2- $2\vec{A} - 3\vec{C}$

$$2\vec{A} = 2i + 2j + 2k$$

$$-3\vec{C} = -6i - 9j - 15k$$

$$2\vec{A} - 3\vec{C} = -4i - 7j - 13k$$

$$|2\vec{A} - 3\vec{C}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 13^2} = \sqrt{16 + 49 + 169} = \sqrt{234}$$

3- $|\vec{A} \times \vec{B}|$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= i(-1+1) - j(-1-2) + k(-1-2)$$

$$= 0 \cdot i + 3j - 3k$$

$\theta \sim A \times B$

$$|\bar{A} \times \bar{B}| = |\bar{A}| |\bar{B}| \sin \theta$$

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3} \times \sqrt{6} \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}} = 1$$

$$\sin \theta = 1$$

$$\therefore \theta = 90^\circ$$

$$|\bar{A} \cdot \bar{B}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

4- $\bar{A} \cdot \bar{B}$

$$\bar{A} = i + j + k$$

$$\bar{B} = 2i - j - k$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = 2 - 1 - 1 = 0$$

Dot الضرب العددي (النقطي)

5- $\theta(\bar{A}, \bar{B})$

$$|\bar{A}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

note

$$\pi = 180^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$$

$$2\pi = 360^\circ$$

$$|\bar{B}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = |\bar{A}| |\bar{B}| \cos \theta$$

$$0 = \sqrt{3} \times \sqrt{6} \cos \theta$$

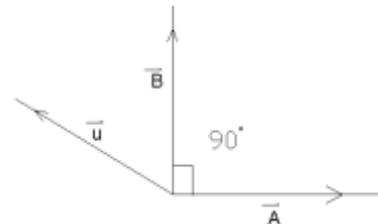
$$\therefore \cos \theta = 0$$

$$\therefore \theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

ان المتجهين \bar{B}, \bar{A} متعامدين لأن الزاوية 90°

6- $\bar{u}(A, B) = \frac{\bar{A} \times \bar{B}}{|\bar{A} \times \bar{B}|}$

$$\bar{u} = \frac{3j - 3k}{3\sqrt{2}}$$

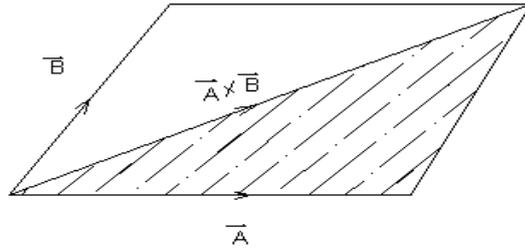


$$\therefore \bar{u} = \frac{3}{3\sqrt{2}}\bar{j} - \frac{3}{3\sqrt{2}}\bar{k}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{k}$$

Example:

أوجد مساحة متوازي الأضلاع ثم مساحة المثلث وقيمة متجه الوحدة العمودي على \bar{A}, \bar{B}



$$\bar{A} = 2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$$

$$\bar{B} = \bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$$

★ مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة x الارتفاع

$$\bar{A} \times \bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\bar{A} \times \bar{B} = \bar{i} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}(4+6) - \bar{j}(8+2) + \bar{k}(6-1)$$

$$= 10\bar{i} - 10\bar{j} + 5\bar{k}$$

نجد الطول للمتجه الجديد حتى نتخلص من I, j, k.

$$|\bar{A} \times \bar{B}| = \sqrt{10^2 + 10^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{100 + 100 + 25} = \sqrt{225} = 15$$

∴ مساحة متوازي الأضلاع = 15

لإيجاد مساحة المثلث نقسم القيمة على 2

∴ مساحة المثلث = $\frac{15}{2} = 7.5$

$$\bar{u}(\bar{A}, \bar{B}) = \frac{\bar{A} \times \bar{B}}{|\bar{A} \times \bar{B}|}$$

$$= \frac{10\bar{i} - 10\bar{j} + 5\bar{k}}{15} = \frac{10}{15}\bar{i} - \frac{10}{15}\bar{j} + \frac{5}{15}\bar{k}$$

$$\bar{u} = \frac{2}{3}\bar{i} - \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{1}{3}\bar{k}$$

Example:

$$\vec{A} = 3i + j - 2k$$

$$\vec{B} = -i + 3j + 4k$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= i \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= i(10) - j(10) + k(10) \\ &= 10i - 10j + 10k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{A} \times \vec{B}| &= \sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2} \\ &= \sqrt{100 + 100 + 100} = \sqrt{300} \\ &= \sqrt{3 \cdot 100} = 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

الرسم كما في المثال السابق

∴ مساحة متوازي الأضلاع = $10\sqrt{3}$

$$5\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = \text{مساحة المثلث}$$

لإيجاد قيمة الوحدة العمودي \vec{u}

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{10i - 10j + 10k}{10\sqrt{3}} = \frac{10}{10\sqrt{3}}i - \frac{10}{10\sqrt{3}}j + \frac{10}{10\sqrt{3}}k \\ \vec{u} &= \frac{1}{\sqrt{3}}i - \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k \end{aligned}$$

Example:

$$\vec{A} = 3i + 9j + 6k$$

$$\vec{B} = i + 3j + 2k$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 + 27 + 12 = 42$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 9^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 81 + 36} = \sqrt{126}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$$

هل إن $\vec{A} \perp \vec{B}$ أو $\vec{A} // \vec{B}$ أثبت ذلك

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

$$42 = \sqrt{126} \times \sqrt{14} \cdot \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{42}{\sqrt{126} \times \sqrt{14}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{42}{\sqrt{126} \times \sqrt{14}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{42}{11.2249726 \times 3.74165} \right)$$

$$= \cos^{-1} \left(\frac{42}{42} \right) = \cos^{-1}(1) = \therefore \theta = 0$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 9 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = i \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= i(18 - 18) - j(6 - 6) + k(-9 + 9)$$

$$= 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$$

∴ المتجهين متوازيان لان الزاوية الناتجة قيمتها صفر .

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

تمارين تطبيقية :-

جد مساحة متوازي الإضلاع

1- $\vec{A} = 3i - 2j + k$
 $\vec{B} = i - k$

ثم جد قيمة متجه الوحدة

2-

إذا كانت

$$\vec{V}_1 = i - k$$

$$\vec{V}_2 = j - k$$

أوجد 1- $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ -2 $3\vec{V}_2 - 2\vec{V}_1$ -3 $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ -4 θ -5 $\theta(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$ بطريقة الضرب النقطي .

3-

$$\vec{A} = i + j + k$$

$$\vec{B} = 2i - j - k$$

$$\vec{C} = 2i + 3j + 5k$$

أوجد $\theta(\vec{A}, \vec{C}), \theta(\vec{B}, \vec{C}), \theta(\vec{A}, \vec{B})$
 باستخدام قانون الضرب ألتجاهي (الديكارتي العددي)

$$\begin{aligned} \bar{A} &= 3i - 2j + 4k \\ 4- \bar{B} &= 2i - k \\ \bar{C} &= -j + k \end{aligned}$$

أوجد $\bar{A} \times \bar{B}$, $\theta(\bar{A}, \bar{B})$, $(\bar{C} \cdot \bar{B})$, $\bar{A} \cdot \bar{C}$, $\bar{A} \cdot \bar{B}$

$$\begin{aligned} 5- \bar{V}_1 &= 3i + j - 2k \\ \bar{V}_2 &= -i + 3j + 4k \end{aligned}$$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع ثم مساحة المثلث ثم قيمة متجه الوحدة \bar{u}

✳️ الأعداد المركبة Complex Numbers ✳️

لحل معادلة من الدرجة الثانية بطريقة الدستور ينتج منها عدد مركب

✎ Example:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 5 &= 0 & a &= 1 \\ a & \quad b & \quad c & & b &= -2 \\ & & & & c &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} \\ x &= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \Rightarrow \text{let } i = \sqrt{-1} \\ x &= \frac{2 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16}}{2} \\ \therefore x &= \frac{2 \pm i4}{2} \Rightarrow x = 1 \pm 2i \end{aligned}$$

∴ الناتج هو عدد مركب من جزء حقيقي وجزء تخيلي .

✎ Example:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 3 &= 0 & a &= 1 \\ a & \quad b & \quad c & & b &= 2 \\ & & & & c &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(3)(1)}}{2(1)} \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} \\ \therefore x &= \frac{-2 \pm i2\sqrt{2}}{2} \\ \therefore x &= -1 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow Z(-1, \sqrt{2}) \text{ or } Z(-1, -\sqrt{2}) \\ & \begin{array}{l} \nearrow \text{Real جزء حقيقي} \\ \searrow \text{Img جزء خيالي} \end{array} \end{aligned}$$

∴ العدد المركب Z يعرف بأنه زوج مرتب $Z(x,y)$ حيث ان y,x عدنان حقيقيان أو يكتب على

$$Z=x+yi \text{ صورة}$$

Real part X يسمى الجزء الحقيقي

Img part Y يسمى الجزء الخيالي

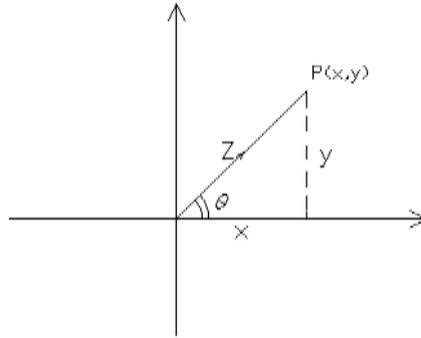
i يسمى بالوحدة الخيالية

حيث أن $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -\sqrt{-1}$, وهكذا

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 * -1 = 1 \quad i^5 = i \cdot i^4 = i$$

$$, i^6 = -1$$

Example:



$$Z = (2, 3)$$

$$\therefore Z = 2 + 3j$$

$$x = R(Z) = 2$$

$$y = Im(Z) = 3$$

لكي نرسم العدد المركب Z نستخرج طول Z

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|Z| = \sqrt{2^2 + 3^2}$$

$$|Z| = \sqrt{4 + 9}$$

$$\therefore |Z| = \sqrt{13}$$

العدد المرافق يعرف \bar{Z} :

$$Z = x + yi \rightarrow \bar{Z} = x - yi$$

$$Z_1 = 2 + 3i \rightarrow \bar{Z}_1 = 2 - 3i$$

أي عكس إشارة الجزء الخيالي فقط

$$Z_2 = -2 + 7i \rightarrow \bar{Z}_2 = -2 - 7i$$

عندما ينتج i^2 نعوض بدلاً منه (-1) عندما يكون لدينا كسر يضرب في مرافق المقام للتخلص من الكسر.

العمليات الجبرية على الأعداد العقدية
 1- الجمع 2- الطرح 3- الضرب 4- القسمة 5- إيجاد الطول .

Example:

if $Z_1 = 1 + 2i$

$Z_2 = 2 - i$

Find 1) $Z_1 + Z_2$ 2) $Z_1 - Z_2$ 3) $|2Z_1 + 3Z_2|$ 4) $Z_1 \cdot Z_2$

5) $\frac{Z_1}{Z_2}$ 6) $\frac{1}{Z_1}$ 7) $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)$

1) $Z_1 = 1 + 2i$

$Z_2 = 2 - i$

$\overline{Z_1 + Z_2} = 3 + i$

let $Z_1 = x_1 + iy_1$

$Z_2 = x_2 + iy_2$

$\overline{Z_1 + Z_2} = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

2) $Z_1 = 1 + 2i$

$Z_2 = 2 - i$

$\overline{Z_1 - Z_2} = -1 + 3i \Rightarrow Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

3) $2Z_1 = 2 + 4i$

$3Z_2 = 6 - 3i$

$\overline{2Z_1 + 3Z_2} = 8 + i$

$|2Z_1 + 3Z_2| = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65} \Rightarrow |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

4) $Z_1 \cdot Z_2 = (1 + 2i)(2 - i)$

$= 2 - i + 4i - 2i^2 \rightarrow i^2 = -1$

$= 2 + 3i + 2$

$= 4 + 3i$

صيغة القانون

$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

$= x_1 \cdot x_2 + ix_1 \cdot y_2 + ix_2 \cdot y_1 + y_1 \cdot y_2 \cdot i^2$

$= x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$\therefore Z_1 \cdot Z_2 = 4 + 3i \rightarrow \text{Conjugat} \rightarrow \overline{\text{Conjugat}} \overline{Z_1 \cdot Z_2} = 4 - 3i$

$$5) \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1+2i}{2-i} \quad \overline{Z_2} = 2+i$$

∴ للتخلص من الكسر نضرب بمرافق المقام .

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{(1+2i) \cdot (2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+4i+i+2i^2}{4-2i+2i-i^2} \\ &= \frac{2-2+4i+i}{4+1} = \frac{5i}{5} = i \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{Z_1}{Z_2} = i \quad \rightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0, \operatorname{Im}(Z) = 1$$

$$6) \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$= \frac{1-2i}{1+4} = \frac{1-2i}{5}$$

$$\therefore \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \quad \Rightarrow \operatorname{Re}(Z) = \frac{1}{5}, \operatorname{Im}(Z) = -\frac{2}{5}$$

$$7) \begin{pmatrix} \overline{Z_1} \\ Z_2 \end{pmatrix} = -i$$

صيغة القانون:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \quad \text{if } Z_2 \neq 0$$

$$\overline{Z_2} = x_2 - iy_2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

تمارين تطبيقية :

1- let $Z_1 = 2 + 3i$

$$Z_2 = 4 + 5i$$

Find 1) $Z_1 + Z_2$ 2) $|3Z_1 - 2Z_2|$ 3) $Z_1 \cdot Z_2$ 4) $\frac{Z_1}{Z_2}$

2- let $Z_1 = 5 + 3i$

$$Z_2 = -2 + 7i$$

Find 1) $Z_1 + Z_2$ 2) $|3Z_1 - 2Z_2|$ 3) $Z_1 \cdot Z_2$ 4) $\frac{Z_1}{Z_2}$

3- Prove that

$$\begin{aligned}\frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i} &= 3-i \\ \frac{(5+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} + \frac{20(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} \\ &= \frac{15+20i+15i+20i^2}{9+12i-12i-16i^2} + \frac{80-60i}{16-12i+12i-9i^2} \\ &= \frac{-5+35i}{25} + \frac{80-60i}{25} \\ &= \frac{-5+35i+80-60i}{25} = \frac{75-25i}{25} = 3-i\end{aligned}$$

4- Prove that

$$\begin{aligned}\frac{(2+i)^2}{(3-4i)} &= 1 \\ \Rightarrow \overline{2+i} &= 2-i \\ \therefore \frac{(2-i)^2}{3-4i} &= \frac{(2-i)(2-i)}{3-4i} \\ &= \frac{4-1-2i-2i}{3-4i} \\ &= \frac{3-4i}{3-4i} = 1\end{aligned}$$

5- Prove that

$$\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i-1} = 1+i$$

★ إذا كان الأسس عدد زوجي فإن النتائج أما 1- أو 1+

$$i^{30} = (i^2)^{15} = (-1)^{15} = -1$$

$$i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = +1$$

★★ أما إذا كان الأسس عدد فردياً فإن النتائج -i أو +i

$$i^{19} = i \cdot i^{18} = i(i^2)^9 = i(-1)^9 = -i$$

$$i^{17} = i \cdot i^{16} = i(i^2)^8 = i(-1)^8 = i$$

$$\Rightarrow 3i^{30} - i^{19} = 3(-1) - (-i) = -3 + i$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{-3+i}{2i-1} &= \frac{-3+i}{2i-1} \cdot \frac{(-2i-1)}{(-2i-1)} \\ &= \frac{6i+3-2i^2-i}{-4i^2-2i+2i+1} = \frac{5i+3+2}{4+1} = \frac{5i+5}{5} \\ &= \frac{5}{5}(i+1) = 1+i\end{aligned}$$

6- Prove that :

$$\frac{5i^{19} - i^{100}}{2i^{81} - i^{77}} = -5 + i$$

$$i^{19} = i(i^{18}) = i(i^2)^9 = i(-1)^9 = -i$$

$$i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$$

$$i^{81} = i(i^80) = i(i^2)^{40} = i(-1)^{40} = i$$

$$i^{77} = i(i^2)^{38} = i(-1)^{38} = i$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{5(-i) - 1}{2i - i} &= \frac{-5i - 1}{i} * \frac{-i}{-i} = \frac{5i^2 + i}{-i^2} \\ &= \frac{5(-i) + i}{-(-1)} = \frac{-5 + i}{1} = -5 + i \end{aligned}$$

بسط العدد المركب مع كتابة الجزء الحقيقي والجزء التخيلي

Example:(7)-Find $Re(Z)$ and $Im(Z)$

$$1 - Z_1 = i^7 - 3i^2$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= i(i^6) - 3(-1) \\ &= i(i^2)^3 + 3 \\ &= i(-1)^3 + 3 \\ &= -i + 3 \Rightarrow Re(Z_1) = 3 \quad Im(Z_1) = -1 \end{aligned}$$

$$2 - Z_2 = i^{17}$$

$$Z_2 = i(i^2)^8 = i(-1)^8 = i \Rightarrow Re(Z_2) = 0, \quad Im(Z_2) = 1$$

$$3 - Z_3 = 5i^{70}$$

$$Z_3 = 5(i^2)^{35} = 5(-1)^{35} = -5 \Rightarrow Re(Z_3) = -5, \quad Im(Z_3) = 0$$

$$4 - Z_4 = 1 + i^{15}$$

$$Z_4 = 1 + i(i^4) = 1 + i(-i)^7 = 1 + i(-1)^7 = 1 - i \Rightarrow Re(Z_4) = 1, \quad Im(Z_4) = -1$$

$$\frac{3 + 4i^{30}}{2 + i} = \frac{-2}{5} + \frac{i}{5}$$

أثبت أن :

★ صيغ كتابة العدد المركب :

1- صيغة المحاور المتعامدة أو (الصيغة العامة Rectangular)

$$Z = x + yi$$

2- الصيغة المثلثية (Traingular)

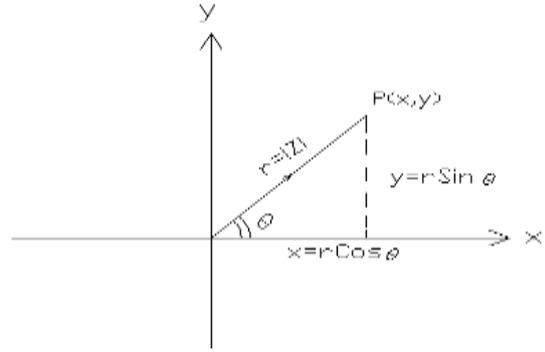
$$Z = r\{ \text{Cos}\theta + i\text{Sin}\theta \}$$

3- الصيغة الأسية (Exponential) أو صيغة أويلر

$$Z = re^{i\theta}$$

4- الصيغة القطبية (Polar)

لتحويل العدد المركب الى الصيغة القطبية من الصيغة الجبرية



$$r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$Z = x + iy$$

من الشكل اعلاه نلاحظ

$$\text{Cos } \theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \longrightarrow x = r \cdot \text{Cos } \theta$$

$$\text{Sin } \theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \longrightarrow y = r \cdot \text{sin } \theta$$

$$\tan \theta = \frac{\text{Sin } \theta}{\text{Cos } \theta} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$$x = r \text{ Cos}\theta$$

$$y = r \text{ Sin}\theta$$

$$\therefore Z = x + iy$$

$$Z = r \text{Cos } \theta + ir \text{Sin } \theta$$

$$= r[\text{Cos}\theta + i\text{Sin}\theta]$$

$$Z = re^{i\theta}$$

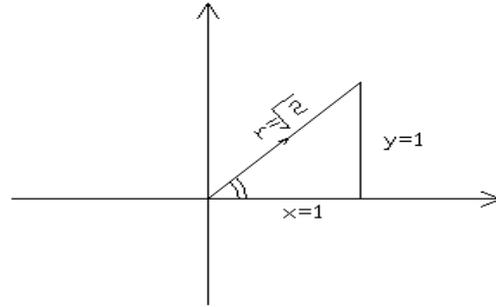
$$Z = r|\theta$$

الصيغة المثلثية

الصيغة الأسية

الصيغة القطبية

مثال (1): حول العدد العقدي من الصيغة الجبرية الى القطبية



$$Z = 1 + i$$

$$x = 1, y = 1$$

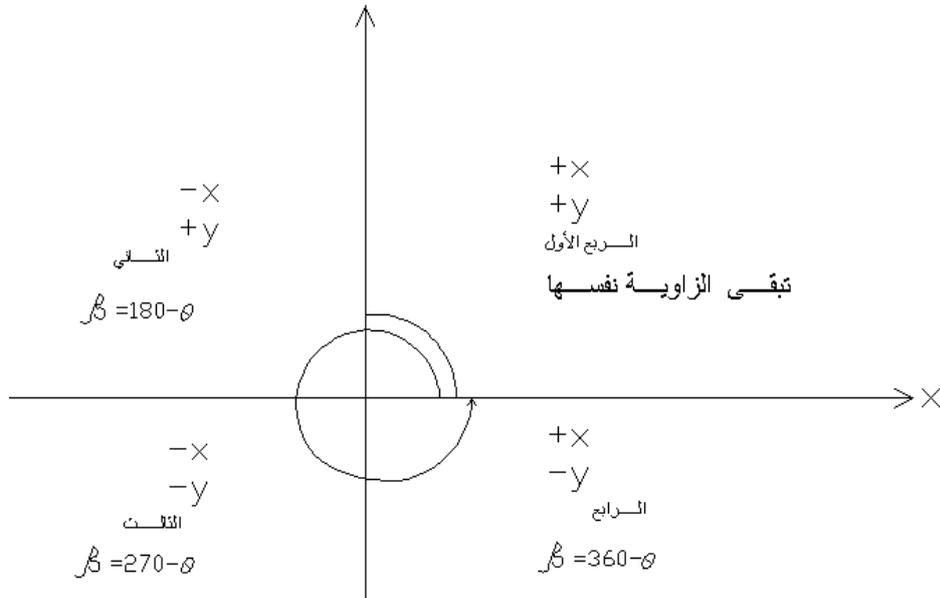
$$r = |Z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

∴ الزاوية تقع في الربع الأول لا تحتاج الى زاوية متممة .

$$\therefore Z = (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{الصيغة المثلثية} = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

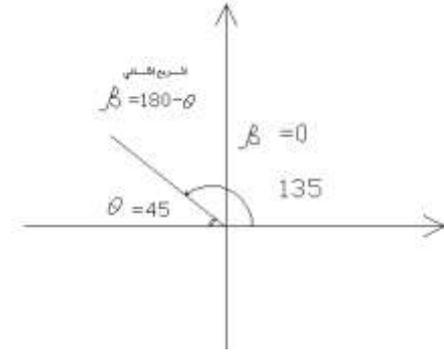


$$Z = re^{i\theta}$$

$$\text{الاسية } Z = \sqrt{2} e^{i45}$$

$$\text{القطبية } Z = \sqrt{2} |45^\circ$$

مثال (2): اكتب العدد بالصيغة القطبية و الأسية .



$$Z = -5 + 5i \Rightarrow x = -5, y = 5$$

$$r = |Z| = \sqrt{5^2 + 5^2} \\ = \sqrt{50} + \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

$$\tan \theta = \frac{-5}{5} = -1 \Rightarrow \theta = -45^\circ$$

∴ يجب إيجاد الزاوية المتممة في الربع الثاني .

$$\beta = 180 - \theta$$

$$\beta = 180 - 45 = 135^\circ$$

$$\therefore Z = 5\sqrt{2} (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

$$Z = 5\sqrt{2} e^{i135}$$

$$Z = 5\sqrt{2} |135^\circ$$

مثال (3): حول العدد من الصيغة المثلثية الى الصيغة الجبرية .

$$\therefore Z = 2\sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

$$\Rightarrow r = 2\sqrt{2} \quad \theta = 45^\circ$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$x = 2\sqrt{2} \cos 45^\circ$$

$$y = 2\sqrt{2} \sin 45^\circ$$

$$x = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

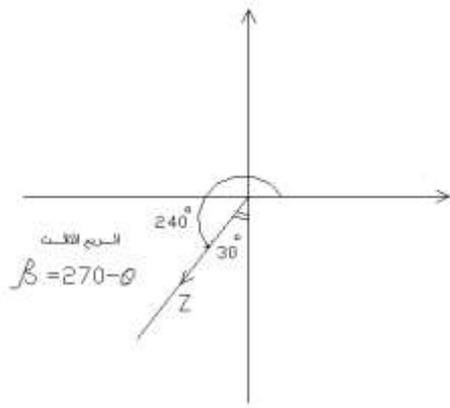
$$y = 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = 2$$

$$y = 2$$

$$\therefore Z = 2 + 2i$$

مثال (4): اكتب العدد بالصيغة القطبية والأسية.



$$Z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i \Rightarrow x = -\sqrt{6}, y = -\sqrt{2}$$

$$r = |Z| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} \quad \therefore \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \theta = 30^\circ$$

تقع في الربع الثالث الزاوية المتممة

$$\beta = 270 - \theta$$

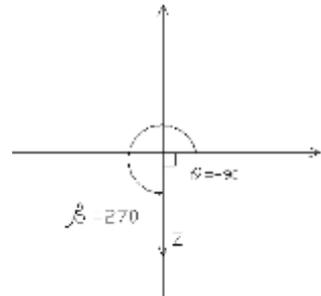
$$\beta = 270 - 30 = 240^\circ$$

$$\therefore Z = 2\sqrt{2} (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$$

$$Z = 2\sqrt{2} e^{i 240}$$

$$Z = 2\sqrt{2} \angle 240^\circ$$

مثال (5): اكتب العدد بالصيغة القطبية.



$$Z = -3i$$

$$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow X = +$$

$$y = -3$$

$$r = |Z| = \sqrt{0+3^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{0} = -\infty \Rightarrow \theta = -90^\circ$$

العدد يقع في الربع الرابع .: الزاوية المتممة

$$\beta = 360^\circ - \theta$$

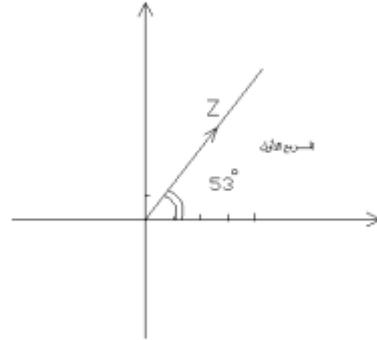
$$\beta = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$$

$$\therefore Z = 3 (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$$

$$Z = 3e^{i270}$$

$$Z = 3 \quad |270^\circ$$

مثال (6): حول العدد إلى الصيغة الأسية .



$$Z = 3 + 4i \Rightarrow x = 3$$

$$y = 4$$

$$r = |Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

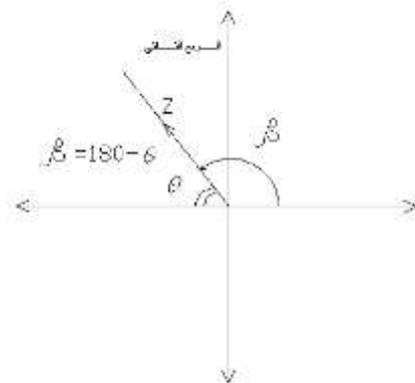
$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{4}{3} \right) = 53^\circ$$

∴ الزاوية تقع في الربع الأول .

$$\therefore Z = 5 (\cos 53^\circ + i \sin 53^\circ)$$

$$Z = 5e^{i53}$$

مثال (7): حول العدد المركب إلى الصيغة القطبية .



$$Z = -2 + 2\sqrt{3}i \Rightarrow x = -2$$

$$y = 2\sqrt{3}$$

$$|Z| = r = \sqrt{2^2 + 4 \times 3} = \sqrt{16}$$

$$\therefore r = 4$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \theta = -60^\circ$$

$$\beta = 180 - 60 = 120^\circ$$

$$\therefore Z = 4 (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$

$$Z = 4e^{i120}, Z = 4 \quad |120^\circ$$

مثال (8): حول العدد المركب إلى الصيغة المتعامدة .

$$Z = 4 \mid 120^\circ$$

$$r = 4, \beta = 120^\circ \Rightarrow y, -x \therefore$$

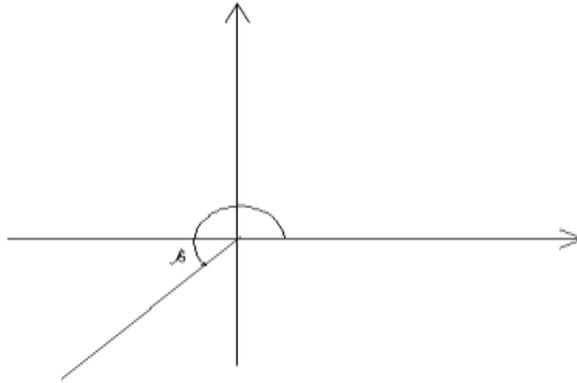
$$\theta = 180 - 120 = 60^\circ$$

$$-x = r \cos \theta \Rightarrow -x = 4 \cos 60 = 4 \times \frac{1}{2} \therefore x = -2$$

$$y = r \sin \theta \Rightarrow y = 4 \sin 60 = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore y = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore Z = -2 + 2\sqrt{3} i$$

مثال (9): حول العدد المركب إلى المحاور المتعامدة إي الصيغة الجبرية .



$$Z = 2\sqrt{2} \mid 240^\circ$$

$$r = 2\sqrt{2}, \beta = 240^\circ$$

$$\theta = 270 - 240 = 30^\circ$$

$$-x = r \cos \theta$$

$$-x = 2\sqrt{2} \cdot \cos 30^\circ$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore x = -\sqrt{6}$$

$$-y = r \sin \theta$$

$$-y = 2\sqrt{2} \cdot \sin 30^\circ$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore y = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow Z = -\sqrt{6} - \sqrt{2} i$$

∴ الزاوية تقع في الربع الثالث . $\leftarrow -y, -x$

تمارين تطبيقه

س1) اكتب العدد المركب بالصيغة القطبية

1) $Z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

2) $Z = -9 + 3i$

3) $Z = \sqrt{2}i + \sqrt{2}$

4) $Z = -\sqrt{3} - \sqrt{2}i$

5) $Z = 4i$

6) $Z = \sqrt{2}i$

7) $Z = \sqrt{3+i}$

8) $Z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

س2) حول العدد إلى صيغة المحاور المتعامدة

1) $Z = 2\sqrt{2} \quad |210^\circ$

2) $Z = 5 \quad |35^\circ$

3) $Z = 2\sqrt{2} \quad |45^\circ$

4) $Z = 5\sqrt{2} \quad |135^\circ$

5) $Z = 3 \quad | \pi$

2) $Z = 12e^{\pi/2i}$

3) $Z = 2e^{5\pi/4i}$

4) $Z = 5e^{7\pi/6i}$

♣♣ الضرب والقسمة والرفع للإعداد المركبة باستخدام الطرق القطبية والمثلثية :-

$$Z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$Z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$1- Z_1 Z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

وذلك بضرب الأقواس وتبسيط جبري باستخدام من قوانين النسب المثلثية لحاصل جمع وطرح زاويتين .

$$2- \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

بشرط إن $Z_2 \neq 0$

※ نظرية ديموافر DeMoiver's Theory ※

$$3- Z^n = r^n (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

حيث إن n عدد صحيح موجب ولإيجاد الجذور النونية .

$$4- Z^{1/n} = r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2K\pi}{n} + i\sin \frac{\theta + 2K\pi}{n} \right)$$

حيث إن $K = 0, 1, 2, \dots, n-1$

Example(1):

$$Z_1 = 3(\cos 100 + i \sin 100)$$

$$Z_2 = \sqrt{5}(\cos 30 + i \sin 30)$$

Find (1) $Z_1 \cdot Z_2$ (2) Z_1/Z_2 (3) Z_1^{10}

(4) $Z_1^{1/2}$ (5) $Z_2^{1/3}$

$$\begin{aligned} 1- Z_1 \cdot Z_2 &= 3 \cdot \sqrt{5} (\cos(100+30) + i \sin(100+30)) \\ &= 3\sqrt{5} (\cos 130 + i \sin 130) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2- Z_1/Z_2 &= 3/\sqrt{5} (\cos(100-30) + i \sin(100-30)) \\ &= 3/\sqrt{5} (\cos 70 + i \sin 70) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3- Z_1^{10} &= 3^{10} (\cos(10 \cdot 100) + i \sin(10 \cdot 100)) \\ &= 3^{10} (\cos 1000 + i \sin 1000) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4- Z_1^{1/2} &= 3^{1/2} \left(\cos \frac{100+2k\pi}{2} + i \sin \frac{100+2k\pi}{2} \right) \\ n=2, k=0,1 \end{aligned}$$

(i) $k=0$

$$\begin{aligned} Z_1^{1/2} &= 3^{1/2} \left(\cos \frac{100}{2} + i \sin \frac{100}{2} \right) \\ &= 3^{1/2} (\cos 50 + i \sin 50) \end{aligned}$$

(ii) $k=1$

$$\begin{aligned} Z_1^{1/2} &= 3^{1/2} \left(\cos \frac{100+2\pi}{2} + i \sin \frac{100+2\pi}{2} \right) \\ &= 3^{1/2} (\cos 230 + i \sin 230) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5- Z_2^{1/3} &= (\sqrt{5})^{1/3} \left(\cos \frac{30+2k\pi}{3} + i \sin \frac{30+2k\pi}{3} \right) \\ n=3, k=0,1,2 \end{aligned}$$

(i) $k=0$

$$\begin{aligned} Z_2^{1/3} &= (\sqrt{5})^{1/3} \left(\cos \frac{30}{3} + i \sin \frac{30}{3} \right) \\ &= (\sqrt{5})^{1/3} (\cos 10 + i \sin 10) \end{aligned}$$

ii) $k=1$

$$\begin{aligned}Z_2^{1/3} &= (\sqrt{5})^{1/3} \left(\cos \frac{30+2\pi}{3} + i \sin \frac{30+2\pi}{3} \right) \\&= (\sqrt{5})^{1/3} \left(\cos \frac{390}{3} + i \sin \frac{390}{3} \right) \\&= (\sqrt{5})^{1/3} (\cos 130 + i \sin 130)\end{aligned}$$

iii) $k=2$

$$\begin{aligned}Z_2^{1/3} &= (\sqrt{5})^{1/3} \left(\cos \frac{30+4\pi}{3} + i \sin \frac{30+4\pi}{3} \right) \\&= (\sqrt{5})^{1/3} \left(\cos \frac{750}{3} + i \sin \frac{750}{3} \right) \\&= (\sqrt{5})^{1/3} (\cos 250 + i \sin 250)\end{aligned}$$

Example:(2)

$$Z_1 = 4(\cos 120 + i \sin 120)$$

$$Z_2 = 3(\cos 70 + i \sin 70)$$

$$Z_3 = 5(\cos 90 + i \sin 90)$$

Find (1) $Z_1 \cdot Z_2$ (2) $Z_1 \cdot Z_3$ (3) Z_1/Z_2
(4) Z_1^{100} (5) Z_3^{40} (6) $\left(\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3}\right)^{30}$

$$\begin{aligned}1- Z_1 \cdot Z_2 &= 4 * 3(\cos 120+70) + i \sin(120+70) \\&= 12(\cos 190 + i \sin 190)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2- Z_1 \cdot Z_3 &= 4 * 5(\cos 120+90) + i \sin(120+90) \\&= 20(\cos 210 + i \sin 210)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3- \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{4}{3}(\cos 120-90) + i \sin(120-90) \\&= \frac{4}{3}(\cos 50 + i \sin 50)\end{aligned}$$

$$4- Z_1^{100} = 4^{100} (\cos 100 \cdot 120 + i \sin 100 \cdot 120) \\ = 4^{100} (\cos 12000 + i \sin 12000)$$

$$5- Z_3^{40} = 5^{40} (\cos 40 \cdot 90 + i \sin 40 \cdot 90) \\ = 5^{40} (\cos 3600 + i \sin 3600)$$

$$6- \left(\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3} \right)^{30} = \left(\frac{12}{5} \right)^{30} (\cos 30(190-90) + i \sin 30(190-90)) \\ = \left(\frac{12}{5} \right)^{30} (\cos 30 \cdot 100 + i \sin 30 \cdot 100) \\ = \left(\frac{12}{5} \right)^{30} (\cos 3000 + i \sin 3000)$$

مثال (3): أحسب $Z_1 \cdot Z_2$ ثم اكتب العدد الناتج بالصيغة الجبرية مع كتابة الجزء الحقيقي والتخيلي

$$Z_1 = 2(\cos 25 + i \sin 25)$$

$$Z_2 = 5(\cos 110 + i \sin 110)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = 2 \cdot 5 (\cos 25 + 110) + i \sin 25 + 110$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = 10 (\cos 135 + i \sin 135)$$

$$Z = 10 \angle 135^\circ$$

$$r = 10$$

$$\beta = 180 - \theta \Rightarrow \theta = 180 - 135 = 45^\circ$$

$$-x = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow x = -\frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$y = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow y = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore Z = 10 \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)$$

$$Z = 5 \cdot 2 \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)$$

$$Z = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)$$

$$= -5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}i$$

$$\therefore \operatorname{Re}(Z) = -5\sqrt{2} \quad , \operatorname{Im}(Z) = 5\sqrt{2}$$

الزاوية تقع في الربع الثاني

مثال (4): بسط باستخدام الطرق القطبية والمثلثية $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{10}$ حيث إن

$$Z_1 = 1 + \sqrt{3}i$$

$$Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$r_1 = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$r_2 = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

الزاوية تقع في الربع الأول

$$\therefore Z_1 = 2(\cos 60 + i\sin 60)$$

$$Z_1 = 2 \angle 60^\circ$$

$$\tan \theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = -60$$

الزاوية تقع في الربع الرابع

$$\therefore \beta = 360 - 60 = 300$$

$$Z_2 = 2(\cos 300 + i\sin 300)$$

$$Z_2 = 2 \angle 300$$

$$\therefore \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{2} (\cos(60 - 300) + i\sin(60 - 300)) ;$$

$$= (\cos(-240) + i\sin(-240))$$

$$\theta = 360 - 240 = 120^\circ$$

$$\therefore \frac{Z_1}{Z_2} = (\cos 120 + i\sin 120)$$

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{10} = (\cos 10 \cdot 120 + i\sin 10 \cdot 120) ;$$

$$= (\cos 1200 + i\sin 1200)$$

$$\theta = 120^\circ$$

نطرح من 1200 مضاعفات 350 فتصبح الزاوية مقبولة

$$= (\cos 120 + i \sin 120)$$

θ تقع في الربع الثاني

$$\therefore \theta = 180 - \beta \Rightarrow \theta = 180 - 120 = 60^\circ$$

$$\therefore -x = 1 * \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$y = 1 * \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore Z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

مثال (5): إذا كان $Z = 1 - 2i$ اوجد $Z^{1/3}$ حسب نظرية دي موافر.

$$Z = 1 - 2i$$

$$r = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\tan \theta = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow \theta = 63^\circ$$

العدد يقع في الربع الرابع

$$\Rightarrow \beta = 360 - 63 = 297$$

$$\therefore Z = \sqrt{5} (\cos 297 + i \sin 297)$$

$$Z^{1/3} = \sqrt{5}^{1/3} \left(\cos \frac{297+2K\pi}{3} + i \sin \frac{297+2K\pi}{3} \right) \quad K = 0, 1, 2$$

مثال (6): العدد $Z = 3 + 4i$ اوجد $Z^{1/4}$.

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\tan \theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53^\circ$$

العدد يقع في الربع الأول

$$\therefore Z = 5 (\cos 53 + i \sin 53)$$

$$Z^{1/4} = 5^{1/4} \left(\cos \frac{53+2K\pi}{4} + i \sin \frac{53+2K\pi}{4} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3$$

H.W if $Z = 4 - 3i$, $Z = -5 + 12i$ Find Z^4 , $Z^{1/4}$

Example(7)

$$Z_1 = 1+i$$

$$Z_2 = 1-i$$

حسب نظرية دي موافر

Find 1- $Z_1 * Z_2$ 2- $\frac{Z_1}{Z_2}$ 3- Z_1^3

$$Z_1 = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

$$Z_2 = \sqrt{2} (\cos -45^\circ + i \sin -45^\circ)$$

الزاوية تقع في الربع الرابع

$$\beta = 360 - 45 = 315$$

$$Z_2 = \sqrt{2} (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$$

$$1- Z_1 \cdot Z_2 = \sqrt{2} * \sqrt{2} (\cos(45 + 315) + i \sin(45 + 315))$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = 2 (\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ)$$

$$2- \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} (\cos(45 - 315) + i \sin(45 - 315))$$

$$= (\cos(-270) + i \sin(-270))$$

$$= \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$$

$$3- Z_1^3 = (\sqrt{2})^3 (\cos 3 * 45 + i \sin 3 * 45)$$

$$= 2\sqrt{2} (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

جذور الأعداد المركبة

$$Z^{1/n} = r^{1/n} \left(\cos \frac{\theta + 2K\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2K\pi}{n} \right)$$

مثال(1): جد جميع جذور العدد المركب $\sqrt[3]{-2i}$.

$$Z = 0 - 2i$$

$$Z^{1/3} = (0 - 2i)^{1/3}$$

$$x = 0, y = -2$$

$$\therefore r = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan\theta_2 = \frac{-2}{0} = -\infty \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

الزاوية تقع في الربع الرابع

$$\beta = 360 - 90 = 270^\circ$$

$$\therefore Z = 2(\cos 270 + i\sin 270)$$

$$\therefore Z^{1/3} = 2^{1/3} \left(\cos \frac{270 + 2K\pi}{3} + i\sin \frac{270 + 2K\pi}{3} \right)$$

ولإيجاد الجذور نعوض عن K ثلاث مرات K=0,1,2

$$Z_1^{1/3} = 2^{1/3} \left(\cos \frac{270 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} + i\sin \frac{270 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} \right)$$

$$Z_2^{1/3} = 2^{1/3} \left(\cos \frac{270 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} + i\sin \frac{270 + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} \right)$$

$$Z_3^{1/3} = 2^{1/3} \left(\cos \frac{270 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} + i\sin \frac{270 + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} \right)$$

مثال(2): جد الجذور التكعيبية الثلاثة الأولى للعدد المركب .

$$Z = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$$

$$Z^{1/3} = (\sqrt{6} - \sqrt{2}i)^{1/3}$$

نحول العدد إلى الصيغة المثلثية والقطبية .

$$= \sqrt{\sqrt{6}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

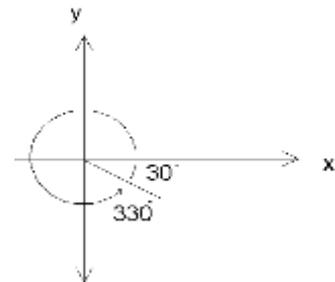
$$\tan\theta = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 330^\circ$$

الزاوية تقع في الربع الرابع

$$\beta = 360 - 30 = 330^\circ$$

$$\therefore Z = 2\sqrt{2}(\cos 330 + i\sin 330)$$

$$\therefore Z^{1/3} = (2\sqrt{2})^{1/3} \left(\cos \frac{330 + 2K\pi}{3} + i\sin \frac{330 + 2K\pi}{3} \right)$$



$$Z^{1/3} = (2)^{1/3} (\sqrt{2})^{1/3} \left(\cos \frac{330+2K\pi}{3} + i \sin \frac{330+2K\pi}{3} \right)$$

$$: (2)^{1/3} (\sqrt{2})^{1/3} = 2^{1/3} * 2^{1/6}$$

$$= (2)^{1/3} (2)^{1/6} \left(\cos \frac{330+2K\pi}{3} + i \sin \frac{330+2K\pi}{3} \right)$$

$$= 2^{2+1/6}$$

$$= 2^{3/6}$$

$$Z^{1/3} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{330+2K\pi}{3} + i \sin \frac{330+2K\pi}{3} \right)$$

$$= 2^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}$$

نعوض عن قيمة K بـ K=0,1,2 لإيجاد الجذور .

$$Z_1^{1/3} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{330}{3} + i \sin \frac{330}{3} \right)$$

$$= \sqrt{2} (\cos 110 + i \sin 110)$$

$$Z_2^{1/3} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{330+2*1\pi}{3} + i \sin \frac{330+2*1\pi}{3} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{330+360}{3} + i \sin \frac{330+360}{3} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{690}{3} + i \sin \frac{690}{3} \right)$$

$$= \sqrt{2} (\cos 230 + i \sin 230)$$

$$Z_3^{1/3} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{330+2*2\pi}{3} + i \sin \frac{330+2*2\pi}{3} \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{960}{3} + i \sin \frac{960}{3} \right)$$

$$Z_2^{1/3} = \sqrt{2} (\cos 320 + i \sin 320)$$

الجذر الأول

$$Z_1^{1/3} = \sqrt{2} \angle 110^\circ$$

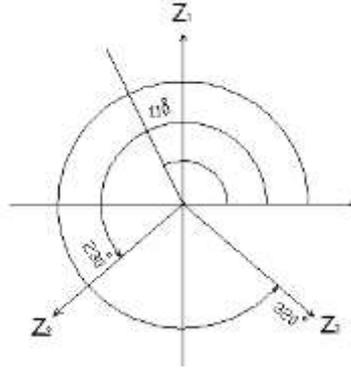
الجذر الثاني

$$Z_2^{1/3} = \sqrt{2} \angle 230^\circ$$

الجذر الثالث

$$Z_3^{1/3} = \sqrt{2} \angle 320^\circ$$

التمثيل الهندسي للجذور .



مثال (3): جد الجذور الخمسة إلى العدد المركب

$$Z = -2 + 2i$$

$$x = -2$$

$$y = 2$$

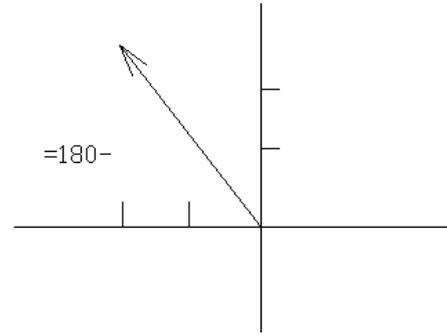
مع التمثيل الهندسي للجذور .

$$r = |Z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$\therefore \beta = 180 - 45 = 135^\circ$$

$$\therefore Z = 2\sqrt{2} \cos 135^\circ + i \sin 135^\circ$$



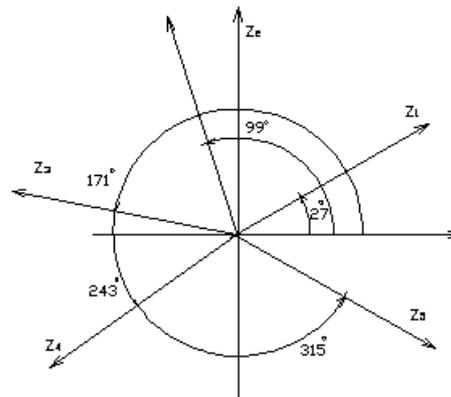
عدد الجذور $n=5$

$$\therefore Z^{1/5} = (2\sqrt{2})^{1/5} \left(\cos \frac{135 + 2K\pi}{5} + i \sin \frac{135 + 2K\pi}{5} \right)$$

نعوض عن قيمة K $K=0,1,2,3,4$

$$Z_1^{1/5} = 2^{3/10} \left(\cos \frac{135}{5} + i \sin \frac{135}{5} \right)$$

$$= 2^{3/10} \left(\cos 27^\circ + i \sin 27^\circ \right)$$



$$Z_2^{1/5} = 2^{3/10} (\cos 99^\circ + i \sin 99^\circ)$$

$$Z_3^{1/5} = 2^{3/10} (\cos 171^\circ + i \sin 171^\circ)$$

$$Z_4^{1/5} = 2^{3/10} (\cos 243^\circ + i \sin 243^\circ)$$

$$Z_5^{1/5} = 2^{3/10} (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$$

$$\therefore Z_1^{1/5} = 2^{3/10} \angle 27^\circ, \quad Z_2^{1/5} = 2^{3/10} \angle 99^\circ, \quad Z_3^{1/5} = 2^{3/10} \angle 171^\circ$$

$$Z_4^{1/5} = 2^{3/10} \angle 243^\circ, \quad Z_5^{1/5} = 2^{3/10} \angle 315^\circ$$

مثال (4): جد جذور المعادلة $Z^4 + 4 = 0$ مع تمثيل الجذور بالرسم.

$$Z^4 = -4$$

$$Z = (-4)^{1/4}$$

$$x = -4, \quad y = 0, \quad n = 4, \quad K = 0, 1, 2, 3$$

$$r = |Z| = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$\tan \theta = \frac{0}{-4} = -0 \Rightarrow \theta = 0$$

الزاوية تقع في الربع الثاني

$$\therefore \beta = 180 - 0 \Rightarrow \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = \pi$$

$$\therefore Z = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\therefore Z^{1/4} = 4^{1/4} \left(\cos \frac{\pi + 2K\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2K\pi}{4} \right)$$

$$K = 0$$

$$\Rightarrow Z_1^{1/4} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow Z_1 = 1 + i$$

$$K = 1$$

$$\Rightarrow Z_2^{1/4} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow Z_2^{1/4} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{2} (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

$$Z_2 = -1 + i$$

$$K = 2$$

$$\Rightarrow Z_3^{1/4} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow Z_3^{1/4} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{2} (\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$$

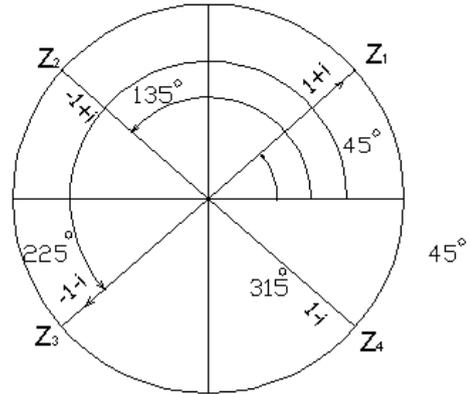
$$Z_3 = -1 - i$$

$$K = 3$$

$$\Rightarrow Z_4^{1/4} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{2} (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$$

$$Z_4 = 1 - i$$



تمارين تطبيقية :

باستعمال الإحداثيات القطبية برهن:

$$(-1 + j)^7 = -8(1 + j)$$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^3 = 1$$

جد الجذور لكل عدد مركب مع الرسم .

$$1) (2i)^{1/2}, \quad 2) (8)^{1/6}, \quad 3) (-1)^{1/3}, \quad 4) \sqrt[4]{-1}$$

جد الجذر الرابع للعدد $-1 - \sqrt{3}i$

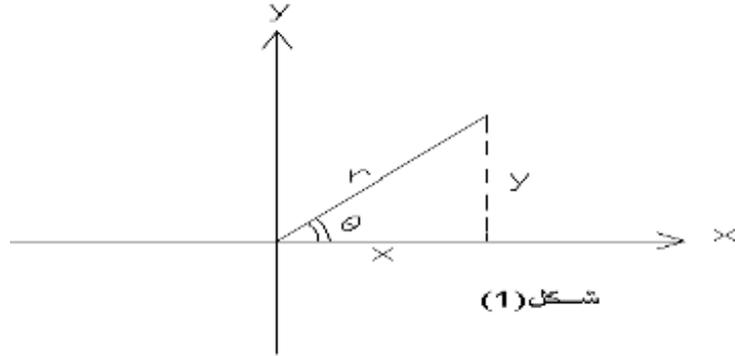
جد الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد $-8i$

إذا كانت $Z^3 = 27(1 - i)$ جد قيم Z .

أوجد الجذرين الرابع والخامس للعدد المركب $Z^5 = -32$

$$\frac{(2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ))^7}{(4(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ))^3} = \sqrt{3} - i \quad \text{برهن إن}$$

★ مراجعة للدوال المثلثية ★ / ★ قوانين الاسس ★ / ★ اللوغاريتمات ★ :
 ★ ★ Trigonometric function ★ ★ النسب المثلثية ★ ★



$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

المقابل

----- = جاه

الوتر

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

المجاور

----- = جتاه

الوتر

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}$$

المقابل

----- = ظاه

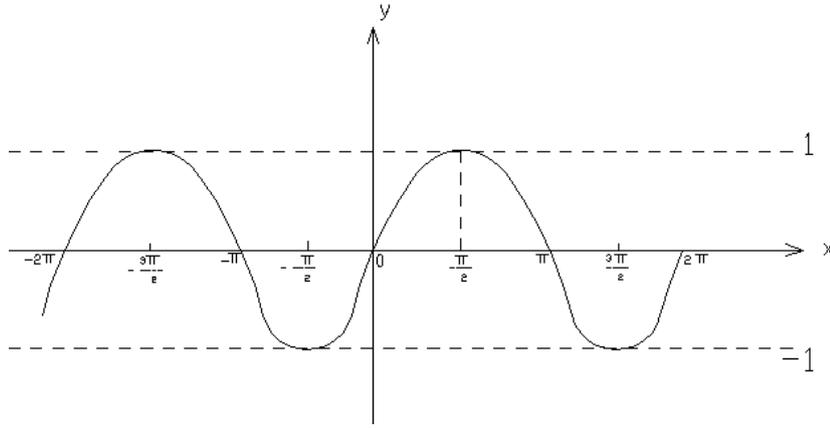
المجاور

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{x}{y} \text{ ظتاه}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ قتاه}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ قاه}$$

$y = \sin x$ رسم دالة



$$\sin(0) = 0$$

$$-2\pi \leq x \leq 2\pi$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$-1 \leq y \leq 1$$

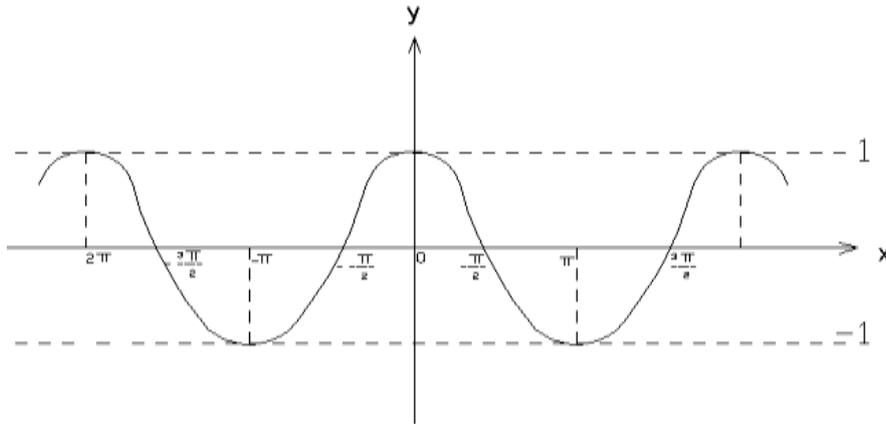
$$\sin \pi = 0$$

$$\pi = 180^\circ$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\sin 2\pi = 0$$

$y = \cos x$ رسم دالة



$$\cos(0) = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

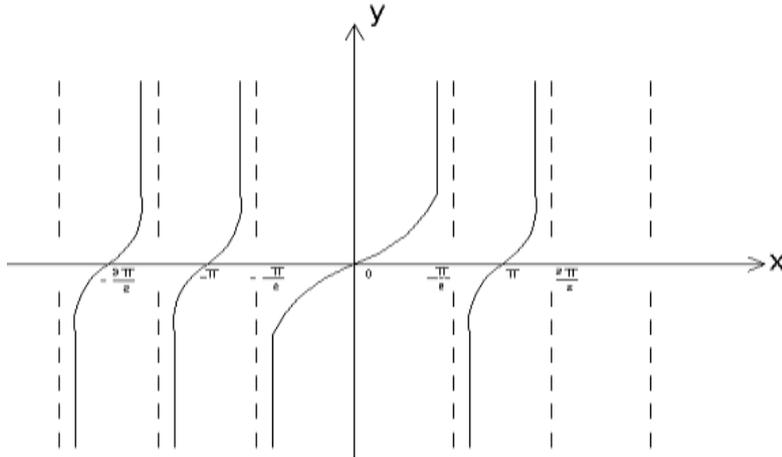
$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos \pi = -1$$

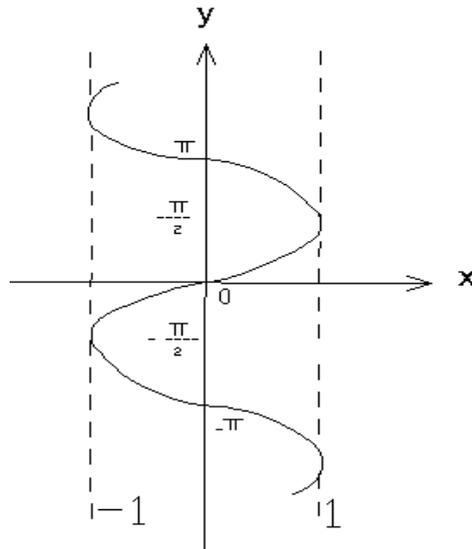
$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\cos 2\pi = 1$$

رسم دالة $y = \tan x$



الدوال المثلثية العكسية تفيد في حل المعادلات التفاضلية ولإيجاد قيم الزوايا



$$y = \sin x$$
$$x = \sin^{-1} y$$
$$x = \arcsin y$$

وكذلك بالنسبة إلى دالة Cos ودالة tan

★ جدول لبعض الدوال الخاصة ★

θ	θ	$\text{Sin}\theta$	$\text{Cos}\theta$	$\text{tan}\theta$
0	0°	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	∞
π	180°	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	∞
2π	360°	0	1	0
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

✽ خواص النسب المثلثية ✽ Properties of triangular function

يمكن حساب النسب المثلثية من المثلث القائم الزاوية بتطبيق نظرية فيثاغورس
 مربع الوتر = مجموع مربع الضلعين الآخرين
 من شكل رقم (1)

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \dots\dots\dots (*)$$

بالقسمة على r^2 \Leftarrow

$$\frac{r^2}{r^2} = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$$

$$1 = \left(\frac{x^2}{r^2}\right) + \left(\frac{y^2}{r^2}\right)$$

$$1 = \text{Cos}^2\theta + \text{Sin}^2\theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{Cos}^2\theta + \text{Sin}^2\theta = 1$$

المعادلة (*) بالقسمة على x^2

$$\frac{r^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$\left(\frac{r}{x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad \Rightarrow \text{Sec}^2\theta = 1 + \text{tan}^2\theta \quad \dots\dots\dots (2)$$

بالقسمة على y^2 \Leftarrow

$$\text{Cof}^2\theta = \text{Csc}^2\theta - 1$$

★★ ملاحظة ★★ : تحتاج هذه النسب في التفاضل والتكامل (وخاصة في حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية والجزئية .

قوانين ضعف الزاوية :

$$1) \sin(A + B) = \sin A \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos A$$

$$2) \sin(A - B) = \sin A \cdot \cos B - \sin B \cdot \cos A$$

$$3) \cos(A + B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$

$$4) \cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$$

$$5) \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \quad 7) \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$6) \sin 2\theta = \sin(\theta + \theta)$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

قوانين الاسس :

إذا كان الاساس هو العدد (10) فإن

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$$

$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n} \quad m \neq n$$

$$10^m)^n = 10^{m \cdot n}$$

$$10^0 = 1$$

$$\sqrt[n]{10^m} = 10^{m/n}$$

اللوغاريتمات : Log

اللوغاريتم : هو قيمة اس الاساس للعدد الاصلي

$$8 = 2^3$$

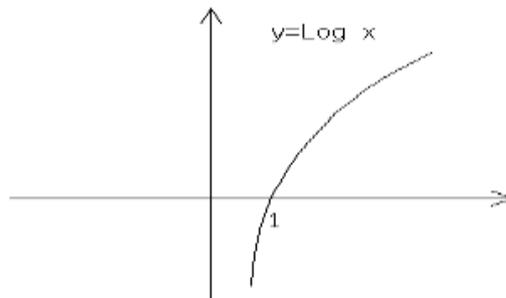
$$9 = 3^2$$

$$\text{Log}_2 8 = 3$$

$$\text{Log}_3 9 = 2$$

★ ★ ملاحظة ★ ★ : لا يوجد لوغاريتم للعدد السالب .

رسم دالة $y = \text{Log} x$



❖ أنواع اللوغاريتمات ❖
 العشري (الذي أساسه لعدد 10 والطبيعي لاي عدد طبيعي .
 لوغاريتم الأساس e.

❖ قوانين اللوغاريتمات ❖ :

$$\text{Log}_A(x \cdot y) = \text{Log}_A x + \text{Log}_A y$$

$$\text{Log}_A\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}_A x - \text{Log}_A y$$

$$\text{Log}_A(x^n) = n \text{Log}_A x$$

$$\text{Log}_A(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \text{Log}_A x \quad \text{if } n \neq 0$$

لوغاريتم الأساس e

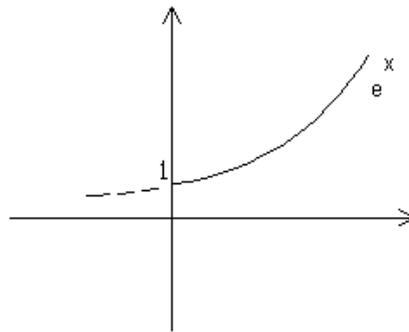
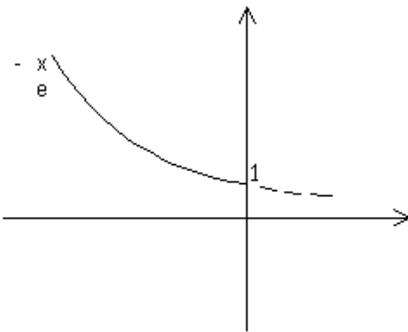
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$e = 2.71828 \approx 2.7$$

أي ان e هي معكوس لدالة (Ln)

$$\text{Ln } e = 1$$



☀ التفاضل والاشتقاق ☀

الدالة: هي مجموعة إحداثيات النقاط (x,y) بحيث أن أي تغير يكون في x يحدث في y .

Example :

$$y = x^2 + 2$$

$$y = \text{Sin}x + \text{cos}x$$

$$y = e^{x^2}$$

$$y = \text{Ln}x^2$$

$$y = x^2 \text{Sin}x + e^x$$

****أنواع الدوال :**

الدوال الجبرية

الدوال المثلثية

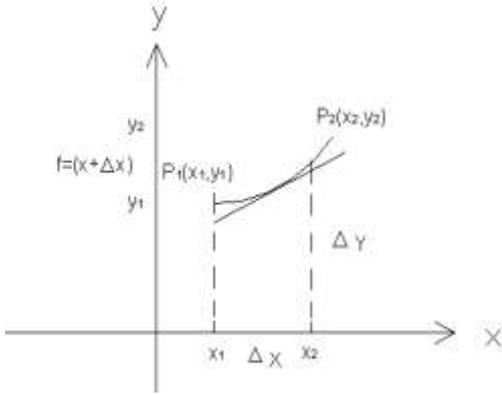
الدوال الآسية

الدوال اللوغارتمية

الدوال المركبة

* التفاضل (الاشتقاق) * The Derivative *

المشتقة: هي ميل المماس لمنحني الدالة أو هو غاية (Limit) معدل التغير لـ y بالنسبة الى المتغير (x) عندما تقترب Δx من الصفر



أيجاد المشتقة :

حسب التعريف

حسب القوانين

قانون إيجاد المشتقة الأولى باستخدام التعريف

$$\text{المشتقة} \quad \boxed{f'(x) = \text{Limit}_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \text{Limit}_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$-y = -f(x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta x \div \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore y' = \left(\frac{dy}{dx} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Example :(1)

$$y = x \Rightarrow y' = 1$$

Sol. :

$$y = f(x)$$

$$f(x) = x$$

$$f(x + \Delta x) = x + \Delta x$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1$$

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2\Delta x \cdot x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= 2x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 2x$$

★★ ملاحظة:

يرمز للمشتقة بـ y' أو $f'(x)$ أو $\frac{dy}{dx}$

Example : (2)

$$f(x) = \sqrt{x}$$

جد المشتقة للدالة بطريقة التعريف :

$$\text{Sol.:} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

القانون:

$$f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x} \quad \text{and} \quad f(x) = \sqrt{x}$$

نعوض في القانون :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

نضرب * مرافق البسط ينتج :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} * \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

تمارين تطبيقية

Find the derivative by definition:

مشتقة الدالة بطريقة التعريف :

1) $f(x) = \frac{1}{x}$

2) $y = x^2 + 2x + 2$

3) $y = x + 5$

4) $y = x^2 + 8$

5) $y = 2\sqrt{x}$

6) $y = 3\sqrt{x} + 7$

❀❀ قوانين مشتقة الدوال الجبرية ❀❀

$$1) \frac{d}{dx}(c) = 0$$

(1) مشتقة الثابت

C = constant

* أي ان مشتقة الثابت تساوي صفر .

📌 Example :(3)

$$y = 5$$

$$\text{sol. } \frac{d}{dx}(5) = 0 \Rightarrow y' = 0 \text{ (} f'(x) = y' \text{)}$$

$$2) \frac{d}{dx}(x) = 1 \quad (2)$$

$$3) \frac{d}{dx}[c f(x)] \quad (3) \text{ مشتقة ثابت * دالة :}$$

📌 Example :(4)

$$y = 3x^2$$

$$\text{sol. } y' = 6x$$

$$4) \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad (4) \text{ مشتقة دالة مرفوعة الى قوى}$$

Example :(5)

$$y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$$

$$5) \frac{d}{dx}[f(x) \mp g(x)] = f'(x) \mp g'(x) \quad (5) \text{ مشتقة جمع او طرح دالتين :}$$

📌 Example :(6)

$$y = f(x) = 2x^2 + 4x + 5$$

$$\text{sol. } y' = f'(x) = 4x + 4$$

$$6) \frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (6) \text{ مشتقة حاصل ضرب دالتين :}$$

أي ان مشتقة ضرب دالتين = مشتقة الاول * الثاني + الأول * مشتقة الثاني

✎ **Example :(7)**

جد المشتقة للمقدار التالي

$$y = x^2 \sqrt{4-x}$$

$$\text{sol. } y = x^2 (4-x)^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot (4-x)^{1/2} + x^2 \cdot \frac{1}{2} (4-x)^{-1/2} \cdot -1 \leftarrow \text{ (مشتقة } x \text{ - مشتقة داخل القوس)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x \cdot \sqrt{4-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{4-x}}$$

7) مشتقة القسمة Division

$$7) \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

* أي ان مشتقة القسمة تساوي : مشتقة البسط * المقام مطروحاً منه مشتقة المقام * البسط على مربع المقام

✎ **Example :(8)**

جد مشتقة الدالة

$$y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

$$\text{sol. } y' = \frac{(2x) \cdot x - (1) \cdot (x^2 - 1)}{x^2} \\ = \frac{(2x^2 - x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$8) \frac{d}{dx} [g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} g'(x)$$

أي ان مشتقة القوس يساوي مشتقة القوس * مشتقة داخل القوس

✎ **Example :(9)**

$$f(x) = (x^4 + 2)^3$$

$$\text{sol. } f'(x) = 3(x^4 + 2)^2 \cdot (4x^3) \\ = 12x^3 (x^4 + 2)^2$$

✎ **Example :(10)** Find the derivatives for the following functions:

جد المشتقة للدوال التالية :

$$1) y = x^4 + 3x + 5$$

$$\text{sol. } y' = \frac{dy}{dx} = 4x^3 + 3 + 0$$

$$\therefore y' = 4x^3 + 3$$

$$2) y = 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + 2x^5$$

$$\text{sol. } y = 2x^{1/2} + (x^2)^{1/3} + 2x^5$$

$$y = 2x^{1/2} + x^{2/3} + 2x^5$$

$$\therefore y' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} + \frac{2}{3} x^{-1/3} + 10x^4$$

$$\therefore y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 10x^4$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} - 1 &= \frac{2}{3} - \frac{3}{3} \\ &= \frac{2-3}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$3) y = \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x}}$$

$$\text{sol. } y = \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot x^{-1/2}$$

$$y' = \sqrt[3]{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot -\frac{1}{2} x^{-3/2}$$

$$\therefore y' = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} - 1 &= \frac{2}{3} - \frac{3}{3} \\ &= \frac{2-3}{3} = -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} - 1 &= -\frac{1}{2} - \frac{2}{2} \\ &= \frac{-1-2}{2} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$4) y = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{6}{\sqrt{x^3}}$$

$$\text{sol. } y = 3 \cdot x^{-1/2} - 2 \cdot x^{-2/3} + 6 \cdot x^{-3/2}$$

$$\therefore y' = 3 \cdot -\frac{1}{2} \cdot x^{-3/2} - 2 \cdot -\frac{2}{3} \cdot x^{-5/3} + 6 \cdot -\frac{3}{2} \cdot x^{-5/2}$$

$$\therefore y' = -\frac{3}{2 \cdot \sqrt{x^3}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{x^5}} - \frac{9}{\sqrt{x^5}}$$

$$5) s = (t^2 - 3)^4$$

$$\text{sol. } v = \frac{ds}{dt} = 4(t^2 - 3)^3 \cdot 2t$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = 8t(t^2 - 3)^3$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a: \text{التعجيل}$$

المسافة = S ، الزمن = t ، السرعة = V ، التعجيل = a

$$6) y = \sqrt{x^2 + 6x - 3}$$

$$\text{sol. } y = (x^2 + 6x - 3)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (x^2 + 6x - 3)^{-\frac{1}{2}} (2x + 6)$$



مشتقة داخل القوس

$$\begin{aligned} \therefore y' &= \frac{1}{2} \cdot 2(x+3)(x^2 + 6x - 3)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + 6x - 3}} \end{aligned}$$

* مشتقة حاصل ضرب دالتين

$$7) y = (x^2 + 2)(2x^3 - 1)^3$$

$$\text{sol. } \frac{dy}{dx} = (x^2 + 2) \cdot 3(2x^3 - 1)^2 \cdot 6x^2 + (2x^3 - 1)^3 \cdot 2x$$

$$\therefore y' = 18x^2(x^2 + 2)(2x^3 - 1)^2 + 2x(2x^3 - 1)^3$$

مشتقة القسمة

$$8) Z = \frac{2t - 3}{3t^2 - 1}$$

$$\text{sol. } Z' = \frac{2(3t^2 - 1) - 6t(2t - 3)}{(3t^2 - 1)^2} = \frac{6t^2 - 2 - 12t^2 + 18t}{(3t^2 - 1)^2}$$

$$\therefore Z' = \frac{-6t^2 + 18t - 2}{(3t^2 - 1)^2}$$

$$9) y = \frac{x^2}{\sqrt{4 - 2x^2}}$$

$$\text{sol. } \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{4 - 2x^2} \cdot 2x - x^2 \cdot \frac{1}{2} (4 - 2x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -4x}{(\sqrt{4 - 2x^2})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x\sqrt{4 - 2x^2} + 2x^3 (4 - 2x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(4 - 2x^2)}$$

*** ملاحظة *** : يمكن حل السؤال اعلاه بطريقة مشتقة حاصل ضرب دالتين :
ترتيب المعادلة كالآتي :

$$y = x^2 (4 - 2x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \frac{1}{2} (4 - 2x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -4x + (4 - 2x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x^3}{\sqrt{4 - 2x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{4 - 2x^2}}$$

مشتقة الدالة المركبة (قاعدة السلسلة) Chain Rule

$$y = u^2 - 1 \quad \dots\dots\dots(1)$$

إذا كانت

$$u = 3x^2 - x \quad \dots\dots\dots(2)$$

نوجد مشتقة الاول (1)

نوجد مشتقة الثاني (2) ثم نوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ كالآتي:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

قاعدة سلسلة واحدة Chain Rule

$$\frac{dy}{du} = 2u \quad \dots\dots\dots(1)$$

مشتقة معادلة:-

$$\frac{du}{dx} = 6x - 1 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2u(6x - 1) \quad \dots\dots\dots(3)$$

نعوض عن قيمة u من معادلة (2) في معادلة (3) يتبع :

$$y' = 2 \cdot [3x^2 - x](6x - 1)$$

$$= 2 \cdot [18x^3 - 3x^2 - 6x^2 + x]$$

$$= 2 \cdot [18x^3 - 9x^2 + x]$$

$$= 36x^3 - 18x^2 + 2x$$

2)if: $y = x^2 - 4x$

$$x = \sqrt{2t^2 + 1} \quad ; \quad \text{Find } \frac{dy}{dt}$$

sol. $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

$$y = x^2 - 4x \quad \Rightarrow \therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(2\sqrt{2t^2 + 1} - 4)2t}{\sqrt{2t^2 + 1}}$$

$$x = (2t^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \therefore \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(2t^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4t$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = (2x - 4) \cdot \frac{1}{2}(2t^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4t$$

$$\therefore y' = (2x - 4)(2t^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2t$$

3) $y = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$ and $u = \sqrt[3]{x^2 + 2}$

Find: $\frac{dy}{dx}$

sol. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{(u^2 + 1) \cdot 2u - (u^2 - 1) \cdot 2u}{(u^2 + 1)^2} = \frac{4u}{(u^2 + 1)^2}$$

$$u = \sqrt[3]{x^2 + 2} = (x^2 + 2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(u^2 + 1) \cdot 2u - (u^2 - 1) \cdot 2u}{(u^2 + 1)^2} \cdot \frac{2}{3}x(x^2 + 2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{u}{(u^2 + 1)^2} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 2}^2} = \frac{8x\sqrt[3]{x^2 + 2}}{3(\sqrt[3]{x^2 + 2}^2 + 1)^2} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 2}^2}$$

4) $y = u^3 + u$

$$u = x^2 + 2x$$

Find $\frac{dy}{dx}$

sol. $\frac{dy}{du} = 3u^2 + 1$ and $\frac{du}{dx} = 2x + 2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (3u^2 + 1)(2x + 2)$$

$$= (3(x^2 + 2x)^2 + 1)(2x + 2)$$

Find: $\frac{dy}{dx}$

1) $y = \sqrt{2x} - \sqrt{x}$

2) $y = (x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$

3) $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

4) $y = \frac{u-1}{u+1}$ and $x = \sqrt{u}$

5) $y = \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}\right)^4$

6) $y = u^3 + u$ $u = x^2 + 2x$
 $\Rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2 + 1$ $\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x + 2$

7) $y = (1 + u^2)^3$, $x = u^2$, $x = 1$ Ans : sol=12

مشتقة الدالة الضمنية :

هي مشتقة كل متغير ، وكل مشتقة بالنسبة لـ y تكون مضروبة بـ y' او $\frac{dy}{dx}$

Example:(1) Find : $\frac{dy}{dx}$

تفيد في حل المعادلات التفاضلية

1) $xy^2 + x^2y = 1$

sol. $x \cdot 2y \cdot y' + y^2 \cdot 1 + x^2 \cdot y' + y \cdot 2x = 0$

$(2xy + x^2) y' + (y^2 + 2xy) = 0$

$(2xy + x^2) y' = -(y^2 + 2xy)$

$\therefore y' = \frac{-(y^2 + 2xy)}{(2xy + x^2)}$

✎ Example :(2) Find: $\frac{dy}{dx}$, (y')

$$2) x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$$

$$\text{sol. } x^2 \cdot y' + y \cdot 2x - (x \cdot 2y \cdot y' + y^2 \cdot 1) + 2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$x^2 \cdot y' + 2xy - 2xy \cdot y' - y^2 + 2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$(x^2 - 2xy + 2y) y' = y^2 - 2xy - 2x$$

$$\therefore y' = \frac{(y^2 - 2xy - 2x)}{(x^2 - 2xy + 2y)}$$

✎ Example :(3) Find: y' , y''

$$3) x^2 - xy + y^2 = 3$$

$$\text{sol. } 2x - (x \cdot y' + y \cdot 1) + 2y \cdot y' = 0$$

$$y'(2y - x) - (2x - y) = 0$$

$$\therefore y' = \frac{-2x + y}{2y - x}$$

$$y'' = \frac{(2y - x)(-2 + y') - (-2x + y)(2y' - 1)}{(2y - x)^2}$$

(H.W) تمارين تطبيقية:

$$1) xy^3 + x^3y = 2 \quad \text{Find: } y', y''$$

$$2) x^2y^2 + 5xy + y^2 = 5$$

$$3) xy + x^2y^2 + x^3y^3 + x^2 = 0$$

$$4) y^3x^2 + x^3y + xy = 1$$

$$5) x^2y^4 + x^4 \cdot y^2 + x^2 \cdot y = 4$$

$$6) y = e^{\ln y^2} + y \ln x^2$$

$$7) \cos y - \sin^3 x^2 - y^3 - x^2 = 6$$

$$8) \cos^2 y - \frac{\sqrt{x}}{2 \sin \sqrt{x}} = \frac{1}{y} + \tan^{-1} x$$

$$9) \tan^3 y - y \cos x = \frac{1}{2} \sin^2 \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$10) 2 + \ln y = 2^{\ln x} + e^{5x}$$

مشتقة الدوال المثلثية

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x

مشتقة الزاوية u بالنسبة الى x

$$1) \frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \left(\frac{du}{dx} \right)$$

$$2) \frac{d(\cos u)}{dx} = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$3) \frac{d(\tan u)}{dx} = \sec^2 u \left(\frac{du}{dx} \right)$$

$$4) \frac{d(\cot u)}{dx} = -\csc^2 u \left(\frac{du}{dx} \right)$$

$$5) \frac{d(\sec u)}{dx} = \sec u \cdot \tan u \left(\frac{du}{dx} \right)$$

$$6) \frac{d(\csc u)}{dx} = -\csc u \cdot \cot u \left(\frac{du}{dx} \right)$$

Example : (1)

$$y = \sin(3x)$$

$$y' = \cos(3x) \cdot 3$$

$$= 3\cos(3x)$$

Example : (2)

$$y = \sin(4x^2 + x)$$

$$= \cos(4x^2 + x) \cdot (8x + 1)$$

$$= (8x + 1) \cos(4x^2 + x)$$

Example : (3)

$$y = \cos(\sqrt{x})$$

$$= -\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin(\sqrt{x})$$

Example : (4)

$$y = \sqrt[3]{\cos x}$$

$$y = (\cos x)^{1/3}$$

$$y' = \frac{1}{3} (\cos x)^{-2/3} \cdot -\sin x \cdot 1$$

مشتقة قوس

Example :(5)

$$\begin{aligned}y &= \tan(x^2) \\ &= \sec^2(x^2) \cdot 2x \\ &= 2x \cdot \sec^2(x^2)\end{aligned}$$

Example :(6)

$$\begin{aligned}y &= \tan(\sqrt{x^2+4}) \\ y &= \tan((x^2+4)^{1/2}) \\ \therefore y' &= \sec^2((x^2+4)^{1/2}) \cdot \frac{1}{2}(x^2+4)^{-1/2} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{(\sqrt{x^2+4})} \cdot \sec^2(\sqrt{x^2+4})\end{aligned}$$

Example :(7)

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{\tan(\sqrt{x})} \\ y &= (\tan(x)^{1/2})^{1/2} \\ \therefore y' &= \frac{1}{2}(\tan(x)^{1/2})^{-1/2} \cdot \sec^2(x)^{1/2} \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} \\ &= \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}(\sqrt{\tan\sqrt{x}})}\end{aligned}$$

Example :(8)

$$\begin{aligned}y &= \operatorname{Cof}(x^2+5x) \\ &= -\operatorname{Csc}^2(x^2+5x)(2x+5) \\ &= -(2x+5) \cdot \operatorname{Csc}^2(x^2+5x)\end{aligned}$$

Example :(9)

$$\begin{aligned}y &= \operatorname{Cof}(\sqrt[3]{x^2+5x+1}) \\ y &= \operatorname{Cof}((x^2+5x+1)^{1/3}) \\ &= \frac{-(2x+5) \operatorname{Csc}^2(\sqrt[3]{x^2+5x+1})}{3 \sqrt[3]{x^2+5x+1}^2}\end{aligned}$$

Example :(10)

$$\begin{aligned}y &= \sec(x^3) \\ &= \sec(x^3) \cdot \tan(x^3) \cdot 3x^2 \\ &= 3x^2 \cdot \sec(x^3) \cdot \tan(x^3)\end{aligned}$$

Example :(11)

$$y = \text{Sec}(\sqrt{x^3})$$

$$= \text{Sec}(x^{3/2})$$

$$\begin{aligned}\therefore y' &= \text{Sec}(x^{3/2}) \cdot \tan(x^{3/2}) \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} \\ &= \frac{3\sqrt{x}}{2} \cdot \text{Sec}(\sqrt{x^3}) \cdot \tan(\sqrt{x^3})\end{aligned}$$

Example :(12)

$$y = \text{Csc}(2x^5)$$

$$\begin{aligned}\therefore y' &= -\text{Csc}(2x^5) \cdot \text{Cot}(2x^5) \cdot 10x^4 \\ &= -10x^4 \cdot \text{Csc}(2x^5) \cdot \text{Cot}(2x^5)\end{aligned}$$

Example :(13)

$$y = \text{Sin}3x + \text{Cos}3x$$

$$= \text{Cos}3x \cdot 3 - \text{Sin}3x \cdot 3$$

$$= 3(\text{Cos}3x - \text{Sin}3x)$$

Example :(14)

$$y = x^2 \text{Sin}x$$

$$= x^2 \cdot \text{Cos}x \cdot 1 + \text{Sin}x \cdot 2x$$

Example :(15)

$$y = \tan^2(3x^2 - x)$$

$$\begin{aligned}\therefore y' &= 2 \tan(3x^2 - x) \cdot \text{Sec}^2(3x^2 - x) \cdot (6x - 1) \\ &= (12x - 2) \tan(3x^2 - x) \cdot \text{Sec}^2(3x^2 - x)\end{aligned}$$

متشقة داخل الزاوية

الدالة هي دالة ضمنية

Example :(16)

$$y = \text{Sin}(x+y)$$

$$\therefore y' = \text{Cos}(x+y)(1+y')$$

$$y' = \text{Cos}(x+y) + y' \text{Cos}(x+y)$$

$$y' - y' \text{Cos}(x+y) = \text{Cos}(x+y)$$

$$y' = \frac{\text{Cos}(x+y)}{(1 - \text{Cos}(x+y))}$$

if $\text{Siny} - \text{Cosx} = 1$ Find y', y''

$$\text{Cosy.y}' + \text{Sinx}.1 = 0$$

$$y' \text{Cosy} = -\text{Sinx}$$

$$\therefore y' = \frac{-\text{Sinx}}{\text{Cosy}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\text{Sinx}}{\text{Cosy}}$$

$$y'' = \frac{\text{Cosy} \cdot -\text{Cosx} + \text{Sinx} \cdot -\text{Siny.y}'}{(\text{Cosy})^2}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\text{Cosy} \cdot \text{Cosx} - \text{Sinx} \cdot \text{Siny} \cdot \left(\frac{-\text{Sinx}}{\text{Cosy}}\right)}{(\text{Cosy})^2}$$

if $y = \text{Sin x} + 2\text{Cos x}$

Prove $y''' + y'' + y' + y = 0$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\text{Cos y.y}' + \text{Sin x}.1 = 0$$

$$y' = \text{Cos x} - 2\text{Sin x}$$

$$\therefore y'' = -\text{Sin x} - 2\text{Cos x} \quad \Rightarrow \text{Sum} = 0$$

$$y''' = -\text{Cos x} + 2\text{Sin x}$$

$$\text{Sinx} + 2\text{Cosx} + \text{Cosx} - 2\text{Sinx} - 2\text{Sinx} - \text{Sinx} - 2\text{Cosx} - \text{Cosx} + 2\text{Sinx} = 0$$

الدوال المثلثية العكسية

$$x = \text{Siny}$$

$$\text{then } y = \text{arc Sinx}$$

$$\text{Or } y = \text{Sin}^{-1}x$$

إذا كانت

وكذلك بالنسبة الى

$$y = \text{arcCosx}$$

$$y = \text{Cos}^{-1}x$$

قواعد الاشتقاق

$$1) \frac{d(\sin^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$2) \frac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$3) \frac{d(\tan^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$4) \frac{d(\cot^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$5) \frac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$6) \frac{d(\csc^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

جميع هذه الاشتقاقات تفيد في طرق التكامل وخاصة بطريقة التعويض

ويمكن برهنتها من خلال $u = \sin y$

من نظرية فيثاغورس

$$[\sin^{-1} u = y] * \sin u$$

$$\sin y = \frac{u}{1}$$

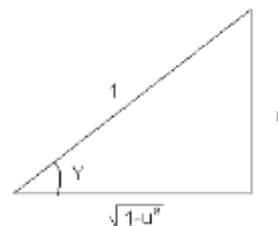
$$\therefore u = \sin y$$

$$\frac{du}{dx} = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \cos y = \frac{\sqrt{1-u^2}}{1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$



☞ **Example :(1)**

$$y = \sin^{-1} x$$

$$\therefore y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot 1$$

☞ Example :(2)

$$y = \text{Cos}^{-1}(2x)$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2$$
$$= \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

☞ Example :(3)

$$y = \tan^{-1}(3x)$$

$$y' = \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3 = \frac{3}{1+9x^2}$$

☞ Example :(4)

$$y = \text{Cot}^{-1}(5x)$$

$$\therefore y' = \frac{-1}{1+(5x)^2} \cdot 5$$

☞ Example :(5)

$$y = \text{Sec}^{-1}(4x)$$

$$y' = \frac{1}{4x\sqrt{4x^2-1}} \cdot 4 = \frac{1}{x\sqrt{16x^2-1}}$$

☞ Example :(6)

$$y = \text{Csc}^{-1}(4x)$$

$$= \frac{-1}{4x(\sqrt{4x^2-1})} \cdot 4 = \frac{-1}{x(\sqrt{16x^2-1})}$$

☞ Example :(7)

$$y = \text{arc Cos}(x^2)$$

$$\therefore y = \text{Cos}^{-1}x^2$$

$$\therefore y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x$$

4- اشتقاق دالة Log

$$(\text{Log})' = \frac{1}{x} \quad \text{مشتقة الدالة *}$$

صيغة القانون

الأساس Ln * الدالة

Example:

1- $y = \text{Log}_7 x^3$

$$y' = \frac{1}{x^3 \cdot \text{Ln}7} * 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3 \cdot \text{Ln}7} = \frac{3}{x \cdot \text{Ln}7}$$

2- $y = \text{Log}_5 \tan x^2$

$$y' = \frac{1}{\tan x^2 \cdot \text{Ln}5} * \text{Sec}^2 x^2 * 2x$$

3- $y = \text{Log}_8 x^4$

$$y' = \frac{1}{x^4 * \text{Ln}8} * 4x^3 = \frac{4x^3}{x^4 * \text{Ln}8} = \frac{4}{x \text{Ln}8}$$

4- $y = \text{Log}_{10} x^7$

$$y' = \frac{1}{x^7 \cdot \text{Ln}10} * 7x^6 = \frac{7x^6}{x^7 \cdot 1} = \frac{7}{x}$$

5- $y = \text{Log}_2 X^8$

$$y' = \frac{1}{x^8 * \text{Ln}2} \cdot 8x^7 = \frac{8x^7}{x^8 * \text{Ln}2} = \frac{8}{x \text{Ln}2}$$

6- $y = \text{Log}_e x$

$$y' = \frac{1}{x \cdot \text{Ln}e} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

مشتقة الدوال اللوغارتمية والأسية:

$$1) \frac{d}{dx} (\text{Ln}u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$2) \frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$3) \frac{d}{dx}(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot \frac{du}{dx}$$

☞ Example :(1)

$$y = 3^{x^2}$$

$$\begin{aligned}\therefore y' &= 3^{x^2} \ln 3 \cdot 2x \\ &= 2x \ln 3 \cdot 3^{x^2}\end{aligned}$$

☞ Example :(2)

$$y = 4^{x^3}$$

$$y' = 4^{x^3} \cdot \ln 4 \cdot (3x^2)$$

☞ Example :(3)

$$y = 4^{\tan x}$$

$$y' = 4^{\tan x} \cdot \ln 4 \cdot \sec^2 x$$

☞ Example :(4)

$$y = \ln(x^2 + 1)$$

$$\therefore y' = \frac{1}{(x^2 + 1)} \cdot 2x$$

☞ Example :(5)

$$y = \ln(\sec \sqrt{x})$$

$$y' = \frac{1}{\sec \sqrt{x}} \cdot \sec \sqrt{x} \cdot \tan \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

☞ Example :(6)

$$y = e^{x^2}$$

$$y' = e^{x^2} \cdot 2x$$

☞ Example :(7)

$$y = \cos x \cdot \ln x^2$$

$$y' = \cos x \cdot \frac{1 \cdot 2x}{x^2} - \sin x \cdot \ln x^2$$

$$= \frac{2}{x} \cos x - \sin x \cdot \ln x^2$$

☞ Example :(8)

$$y = e^{\tan x}$$

$$y' = e^{\tan x} \cdot \sec^2 x$$

 **Example :(9)**

$$y = 7e^{x^3}$$

$$y' = 7 \cdot e^{x^3} \cdot 3x^2$$

$$= 21 \cdot x^2 \cdot e^{x^3}$$

 **Example :(10)**

$$y = e^{\ln x^2} = 1^{x^2}$$

$$= 1^{x^2} \ln 1 \cdot 2x = 0$$

 **Example :(11)**

$$y = 7^{x^5}$$

$$= 7^{x^5} \cdot \ln 7 \cdot 5x^4$$

 **Example :(12)**

$$y = \ln x^2 \cdot e^{x^2}$$

$$= \ln x^2 \cdot e^{x^2} \cdot 2x + e^{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x$$

$$\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$1) \frac{d(\sinh x)}{dx} = \cosh x$$

$$2) \frac{d(\cosh x)}{dx} = \sinh x$$

$$3) \frac{d(\tanh x)}{dx} = \operatorname{sech}^2 x$$

$$4) \frac{d(\coth x)}{dx} = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$5) \frac{d(\operatorname{sech} x)}{dx} = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$$

 **Hyparabollar**  معادلة القطع الناقص

$$6) \frac{d(\operatorname{Csch} x)}{dx} = -\operatorname{Csch} x \cdot \operatorname{Coth} x$$

تفيد هذه الاشتقاقات في حل المعادلات التفاضلية وحلها في المراحل المتقدمة.

Ex (1): show that : $\frac{d}{dx} (\operatorname{Sinh} x) = \operatorname{Cosh} x$

$$y = \operatorname{Sinh} x = \frac{(e^x - e^{-x})}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(e^x + e^{-x})}{2} = \operatorname{Cosh} x$$

Ex (2): show that : $\frac{d}{dx} (\operatorname{Cosh} x) = \operatorname{Sinh} x$

$$y = \operatorname{Cosh} x = \frac{(e^x + e^{-x})}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x})}{2} = \operatorname{Sinh} x$$

Ex (3): Find $\frac{dy}{dx}$ of the following function: –

1. $y = \operatorname{Sinh}(x^2 + 7x + 12)$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{Cosh}(x^2 + 7x + 12) \cdot (2x + 7)$$

2. $y = \operatorname{Cosh}^6(17 - 4x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = 6\operatorname{Sinh}^5(17 - 4x^2) \cdot \operatorname{Cosh}(17 - 4x^2) \cdot (-8x)$$

$$= -48x\operatorname{Sinh}^5(17 - 4x^2) \cdot \operatorname{Cosh}(17 - 4x^2)$$

3. $y = x^2 \operatorname{Sech} 8x$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \operatorname{Sech} 8x \tanh 8x \cdot 8 + \operatorname{Sech} 8x \cdot 2x$$

4. $y = \tanh \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{Sech}^2 \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \left[\frac{(1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} \right]$$

$$= \operatorname{Sech}^2 \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \left(\frac{2}{(1-x)^2} \right)$$

5. $y = \frac{\sqrt{3}}{x+1} \operatorname{Coth} (2x - 1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{3}}{x+1} \operatorname{Csch}^2 (2x - 1) \cdot 2 + \operatorname{Coth} (2x - 1) \cdot \frac{-\sqrt{3}}{(x+1)^2}$$

6. $y = \operatorname{Csch}(e^x + \ln(x + 1))$

$$\frac{dy}{dx} = -\text{Csch}(e^x + \ln(x+1)) \cdot \text{Coth}(e^x + \ln(x+1)) \cdot (e^x + \frac{1}{(x+1)})$$

Ex (4): Given that $\text{Sinh}x = -\frac{3}{4}$, Find $\text{Cosh}x$

sol: since $\text{Cosh}^2x = 1 + \text{Sinh}^2x = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$
 $\therefore \text{Cosh}x = \pm \frac{5}{4}$, we get $\text{Cosh}x = \frac{5}{4}$

تمارين تطبيقية :-

Exc: $\frac{dy}{dx}$ of $y = \sqrt[3]{\text{Sinh}(\cos^{-1} \sqrt{1 - \ln(x + \sin x)})}$

Exc: $\frac{dy}{dx}$ of $y = \tanh^4(x^5 - 5x)^2$

Exc: $\frac{dy}{dx}$ of $y = \text{csch}(\sqrt{x^3} - x^2)^6$

Exc: $\frac{dy}{dx}$ of $y = \text{coth}^2 \sqrt{1 - x^3}$

Exc: $\frac{dy}{dx}$ of $y = \sinh(\cosh x^3)$

Exc: $\frac{dy}{dx}$ of $y = \text{sech}(6 - 6x^6) + \text{coth}(6 - 6x^6)$

✧ تطبيقات التفاضل ✧ / ✧ رسم الدوال ✧

$f(X) = y$ وهي دالة خطية

(1) لرسم الدالة $f(x) = 2x$ وهي دالة خطية

نعطي قيم x لاستخراج قيم المتغير y

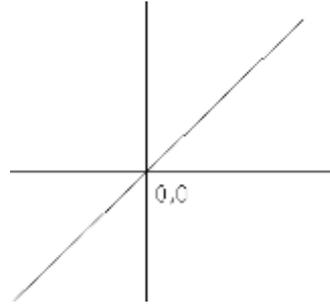
$$f(x) = 2x$$

$$\therefore y = 2x$$

التعويض يكون في الدالة $y = 2x$

لاستخراج النقاط حسب الجدول \Leftarrow

X	Y
0	0
1	2
2	4
-2	-4
3	6
-3	-6



$$y' = 2$$

$$\text{let } y' = 0$$

$$2 \neq 0$$

لا توجد نقاط انقلاب للدالة لانها دالة خطية

✧ Example(1) :

$$f(x) = x^2$$

أرسم الدالة

$$\text{Sol.} \Rightarrow y = x^2$$

لايجاد نقاط الانقلاب (النهايات العظمى والصغرى للمشتقة)

$$y = f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$\text{let } f'(x) = 0$$

$$\therefore 0 = 2x$$

$$\therefore x = 0 \Rightarrow y = 0$$

(0,0) نقطة انقلاب مرشحة

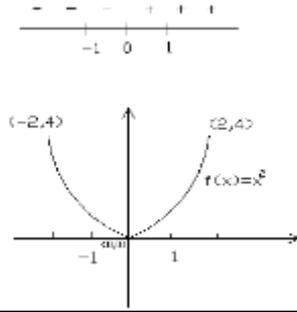
النقطة المرشحة (0,0)

$f'(x) \leftarrow +$ الى - تكون نهاية عظمى

$f'(x) \leftarrow -$ الى + تكون نهاية صغرى

* لا توجد نهاية عظمى او صغرى عندما $x = x_0$ اذا لم تتغير اشارتها

الدالة نهاية نهاية صغرى عند (0,0)



x	y
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4

Example(2) :

$$x = y^2$$

$$\Rightarrow f(y) = y^2$$

$$f'(y) = 2y$$

$$\text{let } f'(y) = 0$$

$$\Rightarrow 2y = 0$$

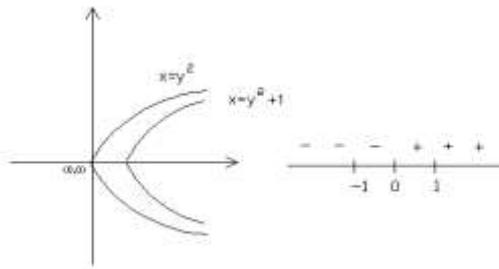
$$\therefore y = 0$$

$$\therefore x = 0$$

$$X = 4py^2$$

$$p = 1/4$$

x	y
0	0
1	1
1	-1
4	2
4	-2



هي النقطة المرشحة (0,0)
نعوض في المشتقة

Example(3) :

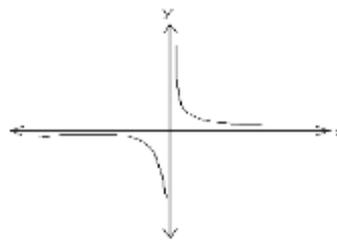
$$y = \frac{1}{x}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

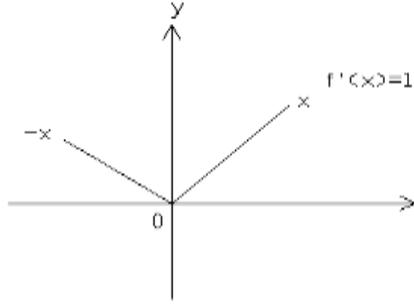
$$\text{let } f'(x) = 0$$

$$\therefore -\frac{1}{x^2} = 0$$



* عن التعويض عن قيم (x) تكون جميع القيم موجبة ما عدا الصفر يجعل الدالة غير معرفة (∞)
نعمل جدول بالقيم ويكون الرسم بالشكل أعلاه.

Example(4) :



$$f(x) = |x|$$

$$\begin{aligned} &| x \Rightarrow x > 0 \\ \Rightarrow f(x) &= -x \Rightarrow x < 0 \\ &| 0 \Rightarrow x = 0 \\ f'(x) &= 1 \end{aligned}$$

:. الدالة زاوية حادة أي لا تحتوي على نقاط انقلاب الدالة تعاني من حالة أنكسار عند (0,0)
* نعمل جدول لاستخراج قيم (x,y) ثم نرسم الدالة

Example(5) :

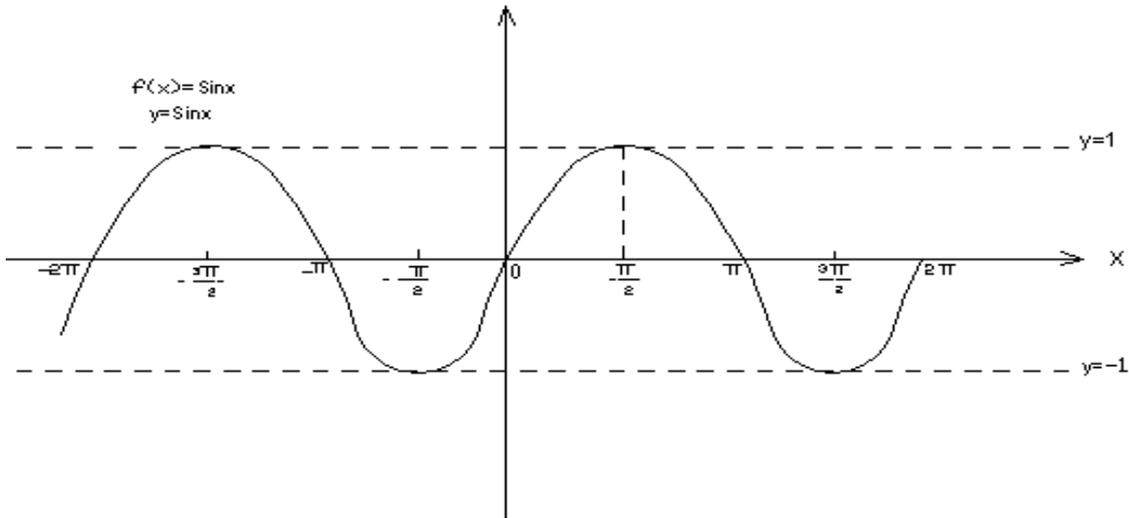
رسم الدوال المثلثية

$$y = \sin x$$

$$y = \sin x \quad \pi = 180^\circ$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin x \quad -1 \leq y \leq 1$$

$$y = 1 \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$$



* إذا تحققت : $0 \leq x \leq 2\pi$
* نستخرج قيم $y = \sin x$ من الجدول او الحاسبة بحيث ان :

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2} &= 1 \\ \sin 0 &= 0 \\ \sin \pi &= 0 \\ \sin \frac{3\pi}{2} &= -1 \end{aligned}$$

Example(6) :

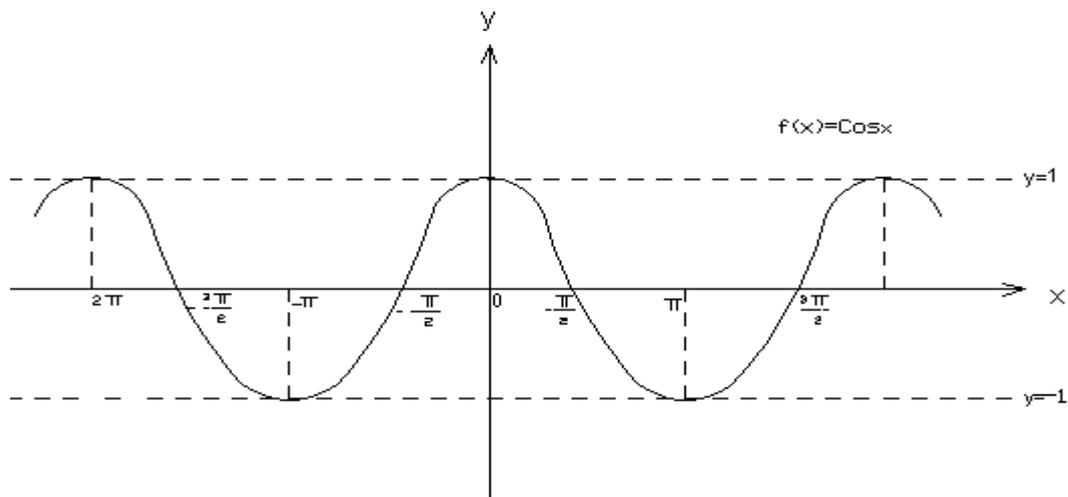
$$y = \cos x$$

$$y = \cos x$$

$$f(x) = \cos$$

$$0 \leq x \leq 2\pi$$

$$-1 \leq y \leq 1$$



*بنفس الطريقة نستخرج قيم $y = \cos x$ كالتالي :

$$\cos 0 = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\cos \pi = -1$$

$$\cos(-\pi) = -1$$

$$\cos 2\pi = 1$$

$$\cos(-2\pi) = 1$$

1) $y = \sin(x+y)^2$

2) $\tan y - \sec x = 5$ Find y', y''

3) $y = -\sec^2 x + \tan x$ Find $y' \quad 5)$

4) $y = \arcsin(5x^3)$

5) $y = \arccos(x^2 - 1)^2$

6) $y = \tan\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

7) $y = \operatorname{arcSec}\left(\frac{5}{3}x^{\frac{1}{5}}\right)$

8) $y = \cot(1-x^3)^2$

9) $y = \operatorname{Csc}\left(\sqrt{1-x^3}\right)$

10) $y = e^{2\sqrt{x}}$

11) $y = e^{(x^2-1)^2}$

12) $y = e^{\sin x^3}$

13) $y = \ln(x+1)^3$

14) $y = \ln(4+x)^2$

15) $y = \ln(5x^2+6)^{\frac{1}{3}}$

16) $y = 10^{x^7}$

17) $y = 100^{x^5}$

18) $y = 1^{x+2}$

19) $y = \operatorname{Sech}(7x^3)$

20) $y = \operatorname{Coth}(\sqrt[3]{x^2+5})$

21) $y = \log_{10} x^7 + \log_{10} x^6 - \log_8 \sqrt{x}$

22) $y = 8x^{20} + e^{x^{20}} - \ln x^{20}$

تمارين تطبيقية:

Q1: Find the derivatives of the following function using the definition

أوجد المشتقة حسب التعريف

1) $y = x^2 - x$

7) $y = x^2 + 5$

2) $y = \frac{3}{5x}$

8) $y = \sqrt[3]{x}$

3) $y = x^2$

9) $y = x + 7$

4) $y = \sqrt{x+1}$

10) $y = \sqrt{x^2 + 4}$

5) $y = 3x^3$

6) $y = \sqrt{x}$

Q2: Find the derivatives of the following function using the Rule derivatives

1) $y = x^3$

15) $y = \frac{x}{m} + \frac{n}{x} + \frac{x^2}{n^2}$

2) $y = \frac{1}{x}$

16) $y = 3\sqrt{x-x^2}$

3) $y = \sqrt{x}$

17) $y = \frac{ax^2}{\sqrt[9]{x}}$

4) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$

18) $y = \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} + x$

5) $y = \text{Sin}x$

19) $y = x^2 + x + 1$

7) $y = x^4 + 3x^2 - 6$

20) $y = x(x^3 - 1)$

8) $y = 6x^3 - x^2$

21) $y = (x-2)(x+3)^4$

9) $y = \frac{x^3}{a+b} + \frac{x^2}{a-b} - x$

22) $y = \frac{(x-2)(x+3)}{x^4}$

10) $y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{5}$

23) $y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

11) $y = 2ax^3 - \frac{x^2}{b_5} + c$

24) $y = (2x^3 - 3x^2 + 6x)^6$

12) $y = x^7 + 3$

25) $y = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$

13) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

26) $y = \frac{(x^2-1)}{x^2+x-2}$

14) $y = \frac{(x+1)}{x^2}$

تمارين خاصة حول حلول التفاضل

$$27) y = (x+2)(x+2x)^5$$

$$28) y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4$$

$$29) y = x\sqrt{x^2+1}$$

$$30) y = \sec^2 5x$$

$$31) y = \tan\sqrt{3x}$$

$$32) y = \sin(x+1)$$

$$33) y = \cos(3x+4)$$

$$34) y = x \sin x$$

$$35) y = \tan(5x+1)$$

$$36) y = \cot x - x^2 \sec x$$

$$37) y = \sqrt{2 + \cot x}$$

$$38) y = \sqrt{\frac{1 + \csc x}{2}}$$

$$39) y = \frac{\tan^3 x}{2}$$

$$40) y = \csc^2 x - \tan^2 x$$

$$41) y^3 = \sin^2 x \cdot y - 2 \sin x$$

$$42) y = \sec^4 x \cdot \tan^4 x$$

$$43) y = \frac{2x^4}{b^2 - x^2}$$

$$44) y = \frac{a-x}{a+x}$$

$$45) y = \frac{t^3}{1+t^2}$$

$$46) y = 2 \sin x + \cos 3x$$

$$47) y = \tan(ax+b)$$

$$48) y = \sin^3 t \cdot \cos t$$

$$49) y = a \sin^3\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$50) y = \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$$

$$51) y = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

$$52) y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$$

$$53) y = \ln \tan\left(45 + \frac{x}{2}\right)$$

$$54) y = \ln(ax+b)$$

$$55) y = \ln(x^3 - 2x + 5)$$

$$56) y = x \ln x$$

$$57) y = \ln^3 x$$

$$58) y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$59) y = \ln(\ln x)$$

$$60) y = e^{\cot x}$$

$$61) y = x^4 \cdot e^{\csc x}$$

$$62) y = \frac{1 + e^x}{e^{2x} - 1}$$

تطبيقات حول المشتقة :

$S =$ المسافة التي يقطعها جسم معين في زمن معين t .

$V =$ السرعة (S')

$a =$ التّعجيل (S'')

Example(1) :

جسم يسير وفق المعادلة التالية جد السرعة والتّعجيل بعد مرور ثانيتين $S = \frac{1}{3}t^3 - 2t$

Sol. $S' = \frac{1}{3}.3t^2 - 2$

$S' = t^2 - 2$

$V(t) = t^2 - 2$

السرعة $V(2) = (2)^2 - 2 = 2 \text{ m/sec}$

$S'' = 2t$

التّعجيل $a(t) = 2t$

$a(2) = 2(2) = 4 \text{ m/sec}^2$

Example(2) :

جسم يسير بخط مستقيم وفق المعادلة التالية $S = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ جد السرعة والتّعجيل عندما $t=0$

Sol. $S' = 3t^2 - 12t + 9$

السرعة $V(t) = 3t^2 - 12t + 9$

$V(0) = 9$

$S'' = 6t - 12$

التّعجيل $a(t) = 6t - 12$

$a(0) = -12$

Example(3) :

$S = t^5 + 1$

جد السرعة والتّعجيل لجسم يتحرك وفق المعادلة التالية :
عندما $t=2$ و $t=5$

Sol. $S' = 5t^4$

$V(t) = 5t^4$

$V(2) = 5(2)^4 = 5(16)$

$V(5) = 5(5)^4 = 5(625) \text{ m/sec}$

$S'' = 20t^3$

$a(t) = 20t^3$

$a(2) = 20(2)^3 = 20(8)$

$a(5) = 20(5)^3 = 20(125) \text{ m/sec}^2$

Example(4) :

$$S = t^3 - 4t + 6$$

جد السرعة والتعجيل لجسم يتحرك وفق المعادلة التالية عندما $t=0$ ، ومتى يمكن ان تكون السرعة متزايدة

Sol. $S' = 3t^2 - 4$
 $V(t) = 3t^2 - 4$
 $V(0) = -4$
 $S'' = 3 \times 2t$
 $a(t) = 6t$
 $a(0) = 0$

تكون السرعة متزايدة اجعل $V=0$

$$3t^2 - 4 = 0 \Rightarrow t = \pm \sqrt{\frac{4}{3}} \Rightarrow \text{let } t_2 = +\sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$v(t) = 3t^2 - 4$$

$$v\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 3\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 - 4$$

$$= 3 \frac{4}{3} - 4$$

$$= 0$$

الجسم مستقر السرعة = صفر . لا تكون السرعة متناقصة وليست متزايدة .

التكامل Integration :

(1) التكامل غير المحدد .

(2) التكامل المحدد .

إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق ضمن الفترة (a,b) بحيث إن $f'(x)$ هي مشتقتها فإن المضاد لها يسمى التكامل ويرمز له \int . $\int f(x) dx = F(x) + C$ ، C يسمى ثابت التكامل

$$1) \int dx = x + c$$

$$2) \int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$3) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$4) \int (u+v) dx = \int u dx + \int v dx$$

التكامل توزيعي على الجمع والطرح

$$5) \int \frac{1}{u} du = Lnu + c$$

$$6) \int e^u du = e^u + c$$

$$7) \int a^u du = \frac{a^u}{Lna} + c$$

$$* \frac{d}{dx} (a^u) = a^u \cdot Lna \cdot \frac{du}{dx}$$

✎ **Example :** Find Integration :-

$$1) \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$2) \int 3x^5 dx = 3 \cdot \frac{x^6}{6} + c$$

$$3) \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$4) \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/3} dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} + c$$

$$= 3/4 x^{4/3} + c$$

$$\frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{3} = \frac{4}{3} ***$$

$$5) \int (2x^2 + 5x + 3) dx$$

$$= \int 2x^2 dx + \int 5x dx + \int 3 dx$$

$$= 2 \int x^2 dx + 5 \int x dx + 3 \int dx$$

$$= 2 \frac{x^3}{3} + 5 \frac{x^2}{2} + 3x + c$$

$$6) \int (2\sqrt{x} - 3x\sqrt{x}) dx$$

$$= 2 \int x^{1/2} dx - 3 \int x^{3/2} dx$$

$$= 2 \frac{x^{3/2}}{3/2} - 3 \frac{x^{5/2}}{5/2} + C$$

تکامل دالة داخل القوس (يجب ان تتوفر مشتقة داخل القوس)

$$7) \int (3x+2)^5 dx$$

$$= \frac{3}{3} \int (3x+2)^5 dx$$

$$= \frac{1}{3} \int (3x+2)^5 \cdot 3 dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+2)^6}{6} + c$$

$$8) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$$

$$= \frac{3}{3} \int (x^3+1)^{-1/2} \cdot x^2 dx$$

(مشتقة داخل القوس $3x^2$)

$$= \frac{1}{3} \int (x^3 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(x^3 + 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$9) \int \frac{8x^2 dx}{(x^3 + 2)^3} = 8 \int \frac{1}{(x^3 + 2)^3} \cdot x^2 dx$$

مشتقة داخل القوس $(3x^2)$

$$= \frac{8}{3} \int (x^3 + 2)^{-3} \cdot 3x^2 dx$$

$$= \frac{8}{3} \left(\frac{(x^3 + 2)^{-2}}{-2} \right) + C$$

$$10) \int \frac{(x^3 + 5x^2 - 4)}{x^2} dx$$

$$= \int \left(\frac{x^3}{x^2} + \frac{5x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} \right) dx$$

$$= \int x dx + \int 5 dx - \int 4x^{-2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 5x - \frac{4x^{-1}}{-1} + C$$

$$11) \int (3S + 4)^2 dS$$

$$= \frac{3}{3} \int (3S + 4)^2 dS = \frac{1}{3} \int (3S + 4)^2 \cdot 3 dS$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3S + 4)^3}{3} \quad \text{or} \quad (3S + 4)^2 = 9S^2 + 24S + 16$$

ثم توزيع التكامل

$$12) \int (x^2 + 1)^4 dx$$

مشتقة داخل القوس $2x$ وهي غير متوفرة لذلك يجب ان يحلل القوس

$$(x^2 + 1)^2 (x^2 + 1)^2$$

$$= (x^4 + 2x^2 + 1) (x^4 + 2x^2 + 1)$$

$$= x^8 + 2x^6 + x^4 + 2x^6 + 4x^4 + 2x^2 + x^4 + 2x^2 + 1$$

$$= x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \int (x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1) dx$$

$$= \frac{x^9}{9} + \frac{4x^7}{7} + \frac{6x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + x + c$$

$$13) \int \frac{1}{x} dx = \text{Ln}|x| + C$$

$$14) \int \frac{1}{(2x+1)} dx = \frac{2}{2} \int \frac{1}{(2x+1)} dx \\ = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(2x+1)} \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \text{Ln}|2x+1| + C$$

$$15) \int \frac{x^2}{(1-2x^3)} dx \\ = \frac{-6}{-6} \int \frac{x^2}{(1-2x^3)} dx = \frac{1}{-6} \int \frac{1}{(1-2x^3)} \cdot -6x^2 dx \\ = \frac{1}{-6} \text{Ln}|1-2x^3| + C$$

$$16) \int \frac{\text{Cos}x}{\text{Sin}x} dx = \int \frac{1}{\text{Sin}x} \cdot \text{Cos}x dx \\ = \text{Ln}|\text{Sin}(x)| + C$$

$$17) \int \tan x dx = \int \frac{\text{Sin}x}{\text{Cos}x} \cdot dx \\ = -1 \int \frac{1}{\text{Cos}x} \cdot -\text{Sin}x dx = -\text{Ln}|\text{Cos}x| + C$$

$$18) \int e^x dx = e^x + C$$

$$19) \int e^{3x^2} \cdot x dx = \frac{6}{6} \int e^{3x^2} x dx \\ = \frac{1}{6} \int e^{3x^2} \cdot 6x dx = \frac{1}{6} e^{3x^2} + C$$

$$20) \int \frac{e^{1/x}}{x^2} \cdot dx = \int e^{x^{-1}} \cdot x^{-2} dx \\ = -1 \int e^{x^{-1}} \cdot x^{-2} dx = -e^{-x} + C$$

$$21) \int a^{2x} dx = \frac{2}{2} \int a^{2x} dx \\ = \frac{1}{2} \int a^{2x} \cdot 2 dx = \frac{1}{2} a^{2x} / \text{Ln}a + C$$

$$22) \int 8^{3x^2} \cdot x dx = \frac{6}{6} \int 8^{3x^2} \cdot x dx \\ = \frac{1}{6} \int 8^{3x^2} \cdot 6x dx = \frac{1}{6} \frac{8^{3x^2}}{\text{Ln}8} + C$$

$$23) \int 7^{x^5} \cdot x^4 dx = \frac{5}{5} \int 7^{x^5} \cdot x^4 dx$$

$$= \frac{1}{5} \int 7^{x^5} \cdot 5x^4 dx = \frac{1}{5} \frac{7^{x^5}}{\ln 7} + C$$

$$24) \int 8^{2x^{1/2}} \cdot x^{-1/2} dx$$

$$= \frac{8^{2x^{1/2}}}{\ln 8} + C$$

$$25) \int 10^{\tan x} \cdot \sec^2 x dx = \frac{10^{\tan x}}{\ln 10} + C$$

$$= 10^{\tan x} + C$$

♥♥ تكامل الدوال المثلثية ♥♥

$$1) \int \sin x \cdot dx = -\cos x + c$$

$$2) \int \cos x \cdot dx = \sin x + c$$

$$3) \int \sec^2 x \cdot dx = \tan x + c$$

$$4) \int \csc^2 x \cdot dx = -\cot x + c$$

$$5) \int \sec x \cdot \tan x \cdot dx = \sec x + c$$

$$6) \int \csc x \cdot \cot x \cdot dx = -\csc x + c$$

*ويجب إن تتوفر مشتقة داخل الزاوية دائماً.

☞ **Example :Find Integration :-**

$$1) \int \sin(5x) \cdot dx = \frac{5}{5} \int \sin 5x \cdot dx$$

$$= \frac{1}{5} \int \sin 5x \cdot 5 dx = \frac{-1}{5} \cos 5x + c$$

$$2) \int x^2 \cdot \cos x^3 \cdot dx = \frac{3}{3} \int \cos x^3 \cdot x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \cos x^3 \cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3} \sin x^3 + c$$

$$3) \int \sin^2 x \cdot \cos x dx$$

$$= \int (\sin x)^2 \cdot \cos x \cdot dx$$

$$= \frac{(\sin x)^3}{3} + c$$

$$4) \int \tan 5x \cdot \sec 5x dx = \frac{5}{5} \int \sec 5x \cdot \tan 5x$$

$$= \frac{1}{5} \int \sec 5x \cdot \tan 5x \cdot 5 dx = \frac{1}{5} \cdot \sec 5x + c$$

$$5) \int x^2 \sec^2(3x^3) dx = \frac{9}{9} \int \sec^2(3x^3) x^2 dx$$

$$= \frac{1}{9} \int \sec^2(3x^3) 9x^2 dx$$

$$= \frac{1}{9} \tan(3x^3) + c$$

$$6) \int x \csc^2 x^2 \cdot dx = \frac{2}{2} \int \csc^2 x^2 \cdot x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \csc^2 x^2 \cdot 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot -\cot x^2 + c = \frac{-1}{2} \cot x^2 + c$$

$$7) \int x^2 \csc(x^3) \cdot \cot(x^3) dx$$

$$= \frac{3}{3} \int x^2 \csc x^3 \cdot \cot x^3 dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \csc x^3 \cdot \cot x^3 \cdot 3x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot -\csc x^3 + c$$

$$\begin{aligned}
& 8) \int (\cos 5x^2 + \sin 4x^2) \cdot dx \\
& \int (\cos 5x^2 \cdot x + \sin 4x^2 \cdot x) \cdot dx \\
& = \frac{1}{10} \cos 5x^2 \cdot 10x \cdot dx + \frac{1}{8} \int \sin 4x^2 \cdot 8x \cdot dx \\
& = \frac{1}{10} \sin 5x^2 - \frac{1}{8} \cdot \cos 4x^2 + c
\end{aligned}$$

♣♣ التكامل المحدد ♣♣:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

يفيد هذا التكامل في حساب المساحات والحجوم

$$1) \int_0^5 x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 = \frac{5^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{25}{2}$$

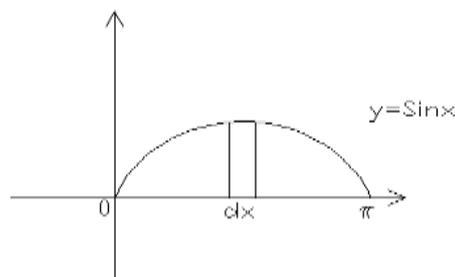
$$2) \int_1^3 x^3 \cdot dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{(3)^4}{4} - \frac{(1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

جد المساحة تحت المنحني $y = x^2$ من $x = 1$ الى $x = 4$

$$A = \int_1^4 x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^4 = \frac{(4)^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3}$$

جد المساحة تحت المنحني $y = \sin x$ من $x = 0$ الى $x = \pi$

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^\pi \sin x \cdot dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -[\cos \pi - \cos 0] \\
&= -[-1 - 1] = 2
\end{aligned}$$

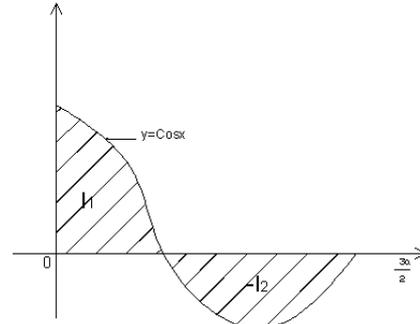


أوجد المساحة تحت المنحني $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ من $x = 0$ الى $x = 2$

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) \cdot dx \\
&= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{2^4}{4} - 2(2)^3 + 4(2)^2 \\
&= 4 \text{ Sq. Unit}
\end{aligned}$$

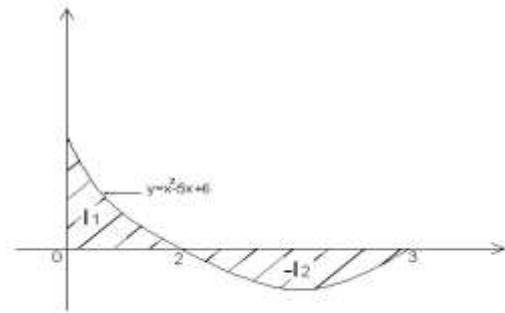
4- أحسب التكامل من الشكل التالي :

$$\begin{aligned}
 I &= I_1 - I_2 \\
 I_1 &= \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \\
 &= \sin x \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = +1 - 0 = 1 \\
 I_2 &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x \, dx = \sin x \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = \sin \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} = 1 - (+1) = -2 \\
 I_2 &= 2 \\
 \therefore I &= |1 + 2| = |3| = 3 \text{ unit}^2
 \end{aligned}$$



5- أحسب التكامل من الشكل التالي :

$$\begin{aligned}
 I &= I_1 - I_2 \\
 I_1 &= \int_0^2 (x^2 - 5x + 6) \, dx \\
 &= \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \Big|_0^2 \\
 &= \frac{2^3}{3} - \frac{5 \cdot 2^2}{2} + 6 \cdot 2 \\
 &= \frac{8}{3} - \frac{20}{2} + \frac{12}{1} = \frac{16 - 60 + 72}{6} = \frac{88 - 60}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_2^3 (x^2 - 5x + 6) \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \Big|_2^3 \\
 &= \left(\frac{3^3}{3} - \frac{5 \cdot 3^2}{2} + 6 \cdot 3 \right) - \frac{28}{6} \\
 &= \left(9 - \frac{45}{2} + 18 \right) - \frac{28}{6} = \frac{-1}{6} \\
 I_2 &= \frac{28}{6} - \left(27 - \frac{45}{2} - \frac{28}{6} \right) \\
 I_2 &= \frac{28}{6} - 27 + \frac{45}{2} + \frac{28}{6} = \frac{29}{6} \\
 \therefore I &= \frac{14}{3} - \left(\frac{-1}{6} \right) = 9 \text{ Unit}^2
 \end{aligned}$$

6- أحسب التكامل من الشكل التالي :

$$y = x + 3$$

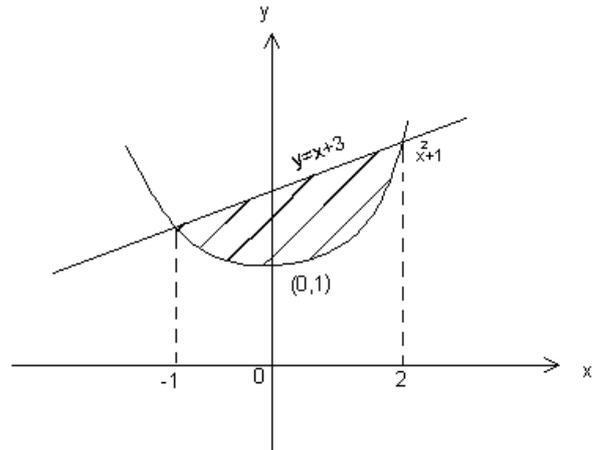
$$y = x^2 + 1$$

$$x^2 + 1 = x + 3$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1)$$

$$x = 2 \text{ or } x = -1$$



$$I = \int_{-1}^2 (x + 3) - (x^2 + 1) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x - \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^2$$

$$= (2 + 6) - \left(\frac{8}{3} + 2 \right) - \left(\frac{1}{2} - 3 \right) - \left(\frac{-1}{3} - 1 \right)$$

$$= 4 \frac{1}{2} \text{ unit}^2$$

7- أحسب التكامل من الشكل التالي :

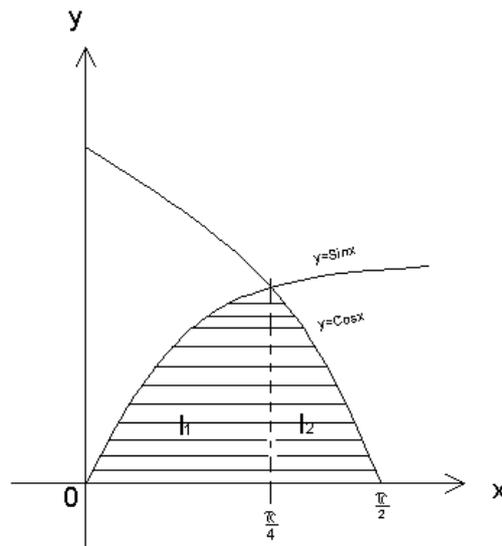
$$I = I_1 + I_2$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \sin x dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi/4} + \sin x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= -0.7071 + 1 + 1 - 0.7071$$

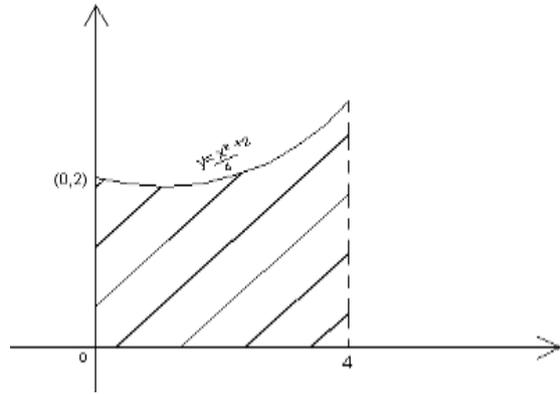
$$= 2 - 1.4142 = 0.5858 \text{ Unit}^2$$



8- أحسب التكامل من الشكل التالي :

$$I = \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} + 2 \right) dx$$

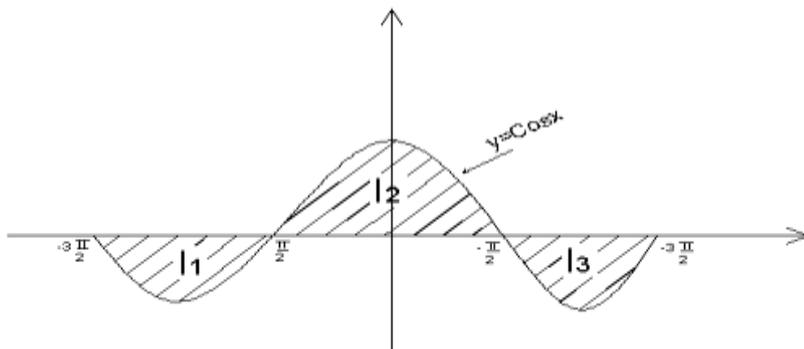
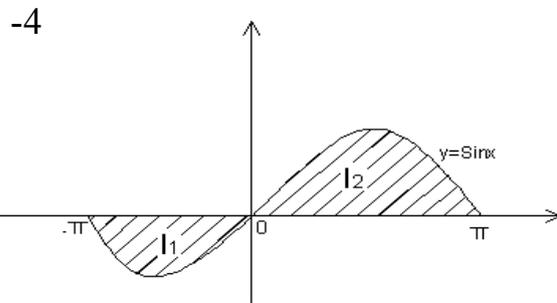
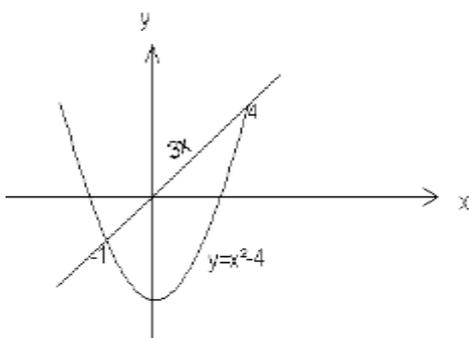
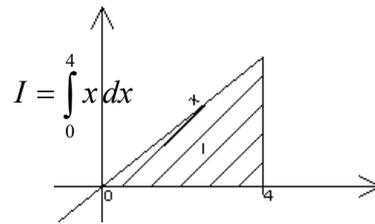
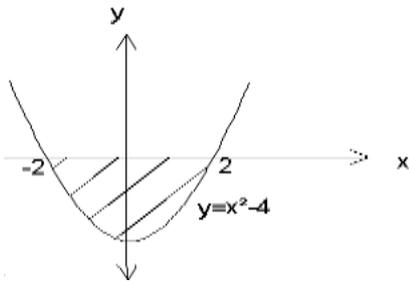
$$= \frac{x^3}{12} + 2x \Big|_0^4 = 13\frac{1}{3} \text{ Unit}$$



تمارين تطبيقية :

$$I = \frac{32}{3} - 2$$

$$I = 8$$



تمارين تطبيقية على التكامل :-

$$1) \int_0^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx$$

$$2) \int_{-3}^2 (x - 6x^2) dx$$

$$3) \int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}$$

$$4) \int (1 + x^2)^2 \cdot x^2 dx$$

$$5) \int (1 + x^2)^2 \cdot dx$$

$$6) = \int \frac{dx}{x(2 + 3 \ln x)^2}$$

$$7) \int e^{2x} \sqrt{3 + e^{2x}} dx$$

$$8) \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$9) \int \tan 5x \cdot \sec^4 5x dx$$

$$10) \int \frac{2x}{x^2 - 3} dx$$

$$11) \int \left(2 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$$

$$12) \int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{x} (1 + \sqrt{x})}$$

$$14) \int \sec^2 x \cdot e^{\tan x} dx$$

$$15) \int \frac{6}{x^7} dx$$

$$16) = \int_1^2 \left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$17) \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} dx$$

$$18) \int_1^5 (25 - x^2)^{-1/2} x dx$$

$$19) \int_0^{\pi/2n} \cos nx dx$$

$$20) \int_0^{2\pi/w} \sin w t dt$$

$$21) \int_2^{-1} \frac{3x}{1 + 2x^2} dx$$

$$22) \int_{-1}^2 \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} dx$$

$$23) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$24) \int \frac{(x - 1)}{x^2 - 2x + 3} dx$$

$$25) \int \tan 5x \cdot \sec^{12} 5x dx$$

$$26) \int \sin^3 x \, dx$$

Note: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$27) \int \sec^2 x \cdot e^{\tan x} \, dx$$

$$28) \int \frac{2x+1}{x^2+x} \, dx$$

$$29) \int_1^{10} \left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \, dx$$

$$30) \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} \, dx$$

$$31) \int \left(x^2 - 2x - 1 + \frac{3}{x+2} \right) \, dx$$

$$32) \int \sin^{2/5} x (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx$$

$$33) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx$$

$$34) \int \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{3} \, dx$$

$$35) \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, dx$$

$$36) \int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{3}} \, dx$$

$$37) \int 100^{x^{100}} \cdot x^{99} \, dx$$

$$38) \int \frac{x}{9-x^2} \, dx$$

$$39) \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) \, dx = \sqrt{2} - 1 = 0.4$$

$$40) \int_0^1 (1-x) \, dx = \frac{1}{2}$$

$$41) \int \csc x \cdot \cos x \, dx$$

$$42) \int \sec x \cdot \sin x \, dx$$

$$43) \int \frac{dx}{e^{x+1}} = \ln|1 + e^{-x}| + c$$

$$44) \int_0^{10} \frac{dx}{(9-x)}$$

$$45) \int 8^{3x^2} \cdot 6x \, dx$$

$$46) \int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3} \, dx$$

$$47) \int (x^3+3)^4 \, dx$$

$$48) \int \frac{x^2}{(1-2x^3)} \, dx$$

$$49) \int \sin^{10} 2x^2 \cdot x \cos 2x^2 \, dx$$

$$50) \int_0^1 8^{2\sqrt{x}} / \sqrt{x} \, dx$$

طرق التكامل

التكامل بطريقة التجزئة

إذا كانت v, u دالتين قابلتين للاشتقاق فإن :

$$d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$$

$$\int d(uv) = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$$

$$uv = \int u \cdot dv + \int v \cdot du$$

$$\boxed{\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du} \text{ Py - Bart}$$

1) $\int \frac{x \sin x}{u \cdot dv} dx$

let $u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \sin x dx \Rightarrow \int dv = \int \sin x dx$

$v = -\cos x$ $\boxed{\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du}$

$$\begin{aligned} \therefore \int x \cdot \sin x dx &= x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cdot \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cdot \cos x + \sin x + c \end{aligned}$$

2) $\int \frac{x e^x}{u \cdot dv} dx$, 3) $\int x^2 \cdot e^x dx$ 3) H.W

$x = u \Rightarrow dx = du$ (1)

$e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x$ (2)

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx \\ &= x e^x - e^x + c \end{aligned}$$

4) $\int x \cdot \ln x dx = \int \frac{\ln x \cdot x dx}{u \cdot dv}$

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx$

$dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c \\ &= \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + c \end{aligned}$$

✱✱ تجزئة الكسور ✱✱:

عندما تكون مشتقة المقام غير متوفرة

يحلل المقام إلى أقواس

نجزء الكسر ثم نحدد المجاهيل

$$1) \int \frac{dx}{(x^2-9)} = \int \frac{dx}{(x-3)(x+3)}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$1 = Ax + 3A + Bx - 3B$$

$$A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$3A - 3B = 1$$

$$-3B - 3B = 1 \Rightarrow -6B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{6} \therefore A = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-3} - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+3}$$

$$= \frac{1}{6} \ln|x-3| - \frac{1}{6} \ln|x+3| + c$$

$$2) \int \frac{1}{x^2-4} \cdot dx = \int \frac{1}{(x-2)(x+2)} \cdot dx$$

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)}$$

$$= \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$Ax + 2A + Bx - 2B = 1$$

$$A + B = 0 \dots\dots\dots(1) \quad * -2$$

$$3A - 2B = 1 \dots\dots\dots(2)$$

$$\overline{-2A - 2B = 0}$$

$$2A - 2B = 1$$

$$\overline{-4B = 1}$$

$$\therefore B = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+2}$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$$

صيغة الكسر
 $\frac{f(x)}{g(x)}$

1- اذا كانت $g(x)$ دالة خطية (من الدرجة الاولى غير مكررة $x+b$)

$$1) \frac{1}{(x+7)(x-2)} = \frac{A}{x+7} + \frac{B}{x-2}$$

2- اذا كانت $g(x)$ دالة خطية مكررة

$$2) \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

3- اذا كانت $g(x)$ دالة من الدرجة الثانية غير مكررة

$$3) \frac{1}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$4) \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

4- اذا كانت $g(x)$ دالة من الدرجة الاولى وغير مكررة

$$5) \frac{x^3-5x+1}{(x+2)} \Rightarrow x^2-2x-1 + \frac{3}{x+2}$$

$$\begin{array}{r} x^2-2x-1 \\ (x+2) \overline{) x^3-5x+1} \\ \underline{x^3+2x^2} \\ -2x^2-5x+1 \\ \underline{2x^2+4x} \\ -x+1 \\ \underline{x+2} \\ 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^3-5x+1}{(x+2)} \cdot dx = \int (x^2-2x-1) \cdot dx + \int \frac{3}{x+2} dx$$

$$\frac{-x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - x + 3L|x+2| + c$$

$$\int \frac{2x+41}{x^2+5x-14} \cdot dx$$

$$x^2+5x-14 = (x+7)(x-2)$$

$$\frac{2x+41}{(x+7)(x-2)} = \frac{A}{x+7} + \frac{B}{x-2}$$

$$= \frac{A(x-2)+B(x+7)}{(x+7)(x-2)}$$

$$\Rightarrow Ax - 2A + Bx + 7B = 2x + 41$$

$$A + B = 2 \Rightarrow A = 2 - B$$

$$-2A + 7B = 41$$

$$-2(2 - B) + 7B = 41$$

$$\Rightarrow 9B = 45$$

$$\therefore B = \frac{45}{9} = 5 \Rightarrow A = 2 - 5 = -3$$

$$\int \frac{2x+41}{x^2+5x-14} \cdot dx = \int \frac{-3}{(x+7)} \cdot dx + \int \frac{5}{(x-2)} \cdot dx$$

$$= -3\text{Ln}|x+7| + 5\text{Ln}|x-2| + c$$

$$\int \frac{4x-3}{6x^2-x-12} \cdot dx$$

$$\frac{4x-3}{(3x-4)(2x-3)} = \frac{A}{(3x-4)} + \frac{B}{(2x-3)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{25}{17}, \quad B = \frac{6}{17}$$

$$\int \frac{4x-3}{6x^2-x-12} \cdot dx = \int \frac{25/17}{(3x-4)} \cdot dx + \int \frac{6/17}{(2x-3)} \cdot dx$$

$$= \frac{25}{17} * 3\text{Ln}|3x-4| + \frac{6}{17} * 2\text{Ln}|2x-3|$$

2- اذا كانت دالة خطية مكررة

$$c = \frac{5}{4}$$

$$B = -\frac{5}{2}$$

$$A = -\frac{5}{4}$$

$$\int \frac{5x \, dx}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x-1)}$$

$$\int \frac{5 \, dx}{(x+1)(x-1)} = \int \frac{-5/4}{(x+1)} \cdot dx + \int \frac{-5/4}{(x+1)^2} \cdot dx + \int \frac{5/4}{(x-1)}$$

$$= \frac{-5}{4} \text{Ln}|x+1| - \frac{5(x+1)^{-1}}{2 \cdot -1} + \frac{5}{4} \text{Ln}|x-1| + c$$

إذا كانت $g(x)$ دالة خطية من الدرجة الثانية وغير مكررة

$$\int \frac{3x^3 + 1}{x(x^2 + 1)} dx = \frac{A}{x} + \frac{Bx + c}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow A = 1, \quad B = 2, \quad c = 0$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ &= \ln|x| + \ln|x^2 + 1| + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{4x^2 + 3}{(x+1)(x^2 + 2)} dx = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + c}{x^2 + 2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{4}{3}, \quad B = \frac{7}{3}, \quad c = \frac{1}{3}$$

$$\int \frac{4}{3} \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{7}{3} \frac{x + \frac{1}{3}}{x^2 + 2} dx$$

$$= \frac{4}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \int \frac{7x+1}{x^2+2} dx$$

$$= \frac{4}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \int \left[\frac{7x}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+2} \right] dx$$

$$\int \frac{7x}{x^2+2} = \frac{7}{2} \int \frac{2x}{x^2+2} dx + \int \frac{1}{x^2+2} dx$$

$$= \frac{7}{2} \ln|x^2+2| + c$$

😊😊 حل المعادلات التفاضلية 😊😊 :

* طريقة فصل المتغيرات

يمكن حل المعادلة التفاضلية في حالة امكانية جمع كل حدود y مع dy وكل حدود x مع dx أي انه اذا كتبت المعادلة:

$$f(y) \cdot dy + g(x) \cdot dx = 0$$

$$\int f(y) \cdot dy + \int g(x) \cdot dx = c$$

فان الحل العام

📖 Example (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + x$$

$$\int dy = \int \left(\frac{1}{x^2} + x \right) dx$$

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + c$$

📖 Example (2):

$$\frac{dy}{dx} = (xy)^{1/2} \quad x > 0, y > 0$$

$$dy = (xy)^{1/2} dx$$

$$\int \frac{dy}{(y)^{1/2}} = \int (x)^{1/2} \cdot dx$$

$$2\sqrt{y} = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{3}x^{3/2} + 2c$$

$$y = \left(\frac{1}{3}x^{3/2} + 2c \right)^2$$

📖 Example (3):

$$\frac{dy}{dx} = 20y(4x^2 + 4x^{-2}) \quad x > 0, y > 0$$

$$\int \frac{dy}{20y^2} = \int (4x^2 + 4x^{-2}) \cdot dx$$

$$\frac{-1}{20}y = \frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{x} + c$$

$$y = \frac{-80}{3} + \frac{80}{x} + c$$

Example: (4)

$$\frac{dy}{dx} = (2x+1)^3$$

$$\int dy = \int (2x+1)^3 \cdot dx$$

$$\int dy = \frac{1}{2} \int (2x+1)^3 \cdot 2 dx$$

$$y = \frac{1}{8} (2x+1)^4 + c$$

Example: (5)

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = 2x \cdot dx$$

$$\frac{-1}{y} = x^2 + c$$

$$y = \frac{-1}{x^2 + c}$$

حل المعادلات التفاضلية الخاضعة للشروط المنصوص عليها :

Example: (6)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+y^2}^3}{y}$$

$$x \leq 0, y \leq 1$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+1^2}} = 0 + c \Rightarrow c = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\int \frac{y dy}{(1+y^2)^{3/2}} = \int dx$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+y^2}} = x - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\int \frac{y dy}{(1+y^2)^{3/2}} = \int dx$$

$$\sqrt{1+y^2} = \frac{-1}{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \int 2y(1+y^2)^{-3/2} dx = \int dx$$

$$1+y^2 = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1+y^2}} = x + c$$

$$y^2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x-1}}$$

$$y = \pm \sqrt{-1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x-1}}}$$

Example: (7)

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1+x^2} \quad x=0, y=-3$$

$$\int dy = \int x\sqrt{1+x^2}.dx$$

$$\int dy = \frac{1}{2} \int (1+x^2) .2xdx$$

$$y = \frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2} + c$$

$$-3 = \frac{1}{3} \sqrt{(1+0)^3} + c$$

$$c = \frac{-10}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} - \frac{10}{3}$$

Example:(8)

$$ydx - xdy = 0$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = 0$$

$$\text{Lny} - \text{Lnx} + c = 0$$

$$\text{Ln} \frac{y}{x} + c = 0$$

$$c = -\text{Ln} \frac{y}{x}$$

$$c = -\text{Ln} \frac{10}{1}$$

$$c = -\text{Ln} 10$$

$$\therefore c = -1 \Rightarrow \text{Ln} \frac{y}{x} - 1 = 0$$

$$\text{Lny} = \text{Lnx} = \text{Lne}^c$$

$$\text{Ln}|y| = \text{Ln}(|x|.e^c)$$

$$y = x.e^c$$

$$y = x.e^{-1}$$

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$(1,10) y \neq 0, x \neq 0$$

الحل العام

Example:(9)

$$\frac{dy}{x} + \frac{dx}{y} = 0 \quad (1,1)$$

$$\frac{dy}{x} = -\frac{dx}{y}$$

$$\int y \, dy = -\int x \, dx$$
$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + c = 0$$

$$\frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{2} + c = 0$$

$$\Rightarrow c = -1 \Rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{y^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2} \quad *2$$

$$y^2 = 2 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{2-x^2}$$

1) $\frac{dy}{dx} + y = 1 \quad (1,1)$

2) $xy^3 dx + e^{x^2} dy = 0 \quad (0,1)$

3) $x^2 dx + y(x-1) dy = 0 \quad (1,2)$

4) $xy^3 dx + (y+1)e^{-x} dy = 0 \quad (0,3)$

5) $\frac{dy}{dx} + x + 2y = 0 \quad (0,5)$

6) $y \cdot \frac{\ln x}{x} = \frac{dy}{dx}$

7) $\frac{dy}{dx} = xy \quad (0,10)$

Example(10) :

$$\frac{dy}{dx} = e^{5x-y} \quad (0,0)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{5x} \cdot e^{-y}$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = e^{5x} dx$$

$$\int e^y \, dy = \frac{1}{5} \int e^{5x} \cdot 5 dx$$

$$e^y = \frac{1}{5} e^{5x} + c$$

$$e^0 = \frac{1}{5} e^0 + c \quad \because e^0 = 1$$

$$\therefore c = -\frac{1}{5}$$

$$\therefore e^y = \frac{1}{5} e^{5x} - \frac{1}{5}$$

$$\ln e^y = \ln\left(\frac{1}{5} e^{5x} - \frac{1}{5}\right)$$

$$y \ln e = \ln\left(\frac{1}{5} e^{5x} - \frac{1}{5}\right)$$

$$y = \ln\left(\frac{1}{5} e^{5x} - \frac{1}{5}\right)$$

تمارين تطبيقية :

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية عند النقطة المعينة:

❁ الطرق العددية في التكامل Numerical Methods in integration ❁

1- قاعدة شبه المنحرف Rule of trapezoidal :

لتكن $f(x)$ دالة غير سالبة وقابلة للتكامل ضمن الفترة $[a, b]$ تجزئ الفترة الى n من الفترات بتجزئة منتظمة ونحدد الإحداثيات الصادية وبذلك تقسم الى n من الشرائح .

$$h = \Delta X = \frac{b-a}{n}$$

$$X_i = a + i\Delta x$$

$$X_0 = a$$

$$X_1 = a + 1\Delta x$$

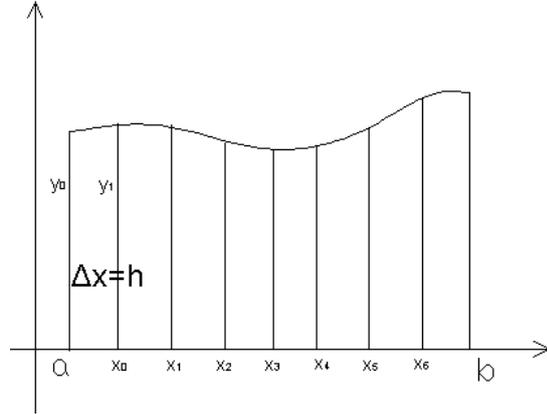
$$X_2 = a + 2\Delta x$$

$$X_3 = a + 3\Delta x$$

$$X_4 = a + 4\Delta x$$

$$X_5 = a + 5\Delta x = b$$

$$A_1 = \left(\frac{y_0 + y_1}{2} \right) \cdot h$$



عداد = i

المساحة = العرض \times الارتفاع

= المعدل بين الطولين \times العرض

$$\therefore A = h \left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + \frac{y_n}{2} \right]$$

n يمكن ان يكون عدد فردي

مثال (1) احسب القيمة التقريبية للتكامل المحصور بين $x=0$, $x=1$ بطريقة شبه المنحرف

على اعتبار $n=5$.

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)} dx$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$$

$$A = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)} dx = h \left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2} \right]$$

X	Y	F(x)
0	Y_0	1
0.2	Y_1	0.96
0.4	Y_2	0.86
0.6	Y_3	0.73
0.8	Y_4	0.61
1	Y_5	0.5

$$= 0.2 \left[\frac{1}{2} + 0.96 + 0.86 + 0.73 + 0.61 + \frac{0.5}{2} \right]$$

$$= 0.2 \left[\frac{1.5}{2} + 3.16 \right]$$

$$= 0.2 [0.75 + 3.16] = 0.2 [3.91] = 0.782$$

مثال (2) إحصاء قيمة التكامل بطريقة شبه المنحرف ثم احسب قيمة التكامل بالطريقة الحقيقية على اعتبار $n=5$.

$$\int_0^1 x^2 dx$$

$$A = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} = 0.333334$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$$

X	Y	F(x)
0	Y ₀	1
0.2	Y ₁	0.04
0.4	Y ₂	0.16
0.6	Y ₃	0.36
0.8	Y ₄	0.64
1	Y ₅	1

$$A = \int_0^1 x^2 dx = 0.2 \left[0 + 0.04 + 0.16 + 0.36 + 0.64 + \frac{1}{2} \right]$$

$$= 0.34$$

مثال (3) إحصاء قيمة التكامل بالطريقة الحقيقية ثم بطريقة شبه المنحرف وافرض ان $n=5$.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

$$A = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = 0.693$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{5} = 0.2$$

X	Y	F(x)
1	Y ₀	1
1.2	Y ₁	0.83
1.4	Y ₂	0.71
1.6	Y ₃	0.62
1.8	Y ₄	0.56
2	Y ₅	0.5

$$A = 0.2 \left[\frac{1}{2} + 0.83 + 0.71 + 0.62 + 0.56 + \frac{0.5}{2} \right]$$

$$A = 0.694$$

مثال (4) إحصاء قيمة التكامل بطريقة شبه المنحرف بأخذ $n=4$.

X	Y	F(x)
0	Y ₀	1
0.25	Y ₁	0.9399
0.50	Y ₂	0.7788
0.75	Y ₃	0.5701
1	Y ₄	0.3679

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0.25$$

$$A = 0.25 \left[\frac{1}{2} + 0.9399 + 0.7788 + 0.5701 + \frac{0.3679}{2} \right]$$

$$A = 0.25 [0.5 + 0.9399 + 0.1839] = 2.97275$$

مثال (5) إحصاء التكامل بطريقة شبه المنحرف افرض $n=5$.

$$\int_{-3}^2 \sqrt{9-x^2} dx$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2+3}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$A = 1 \left[0 + \sqrt{5} + \sqrt{8} + 3 + \sqrt{8} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right]$$

$$= \left[\sqrt{5} + 2\sqrt{8} + 3 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right]$$

$$= [2.236 + 5.6569 + 1.118] = 12.0109$$

X	Y	F(x)
-3	Y ₀	0
-2	Y ₁	$\sqrt{5}$
-1	Y ₂	$\sqrt{8}$
0	Y ₃	3
1	Y ₄	$\sqrt{8}$
2	Y ₅	$\sqrt{5}$

$$n=5 \text{ افرض } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^2}$$

مثال (6)

$$h = \frac{\frac{1}{2}-0}{5} = 0.1$$

$$A = 0.1 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1.01} + \frac{1}{1.04} + \frac{1}{1.09} + \frac{1}{1.16} + \frac{1}{2(1.25)} \right]$$

$$= 0.4631 \text{ (Unit}^2\text{)}$$

X	Y	F(x)
0	Y ₀	$\frac{1}{2}$
0.1	Y ₁	$\frac{1}{1.01}$
0.2	Y ₂	$\frac{1}{1.04}$
0.3	Y ₃	$\frac{1}{1.09}$
0.4	Y ₄	$\frac{1}{1.16}$
0.5	Y ₅	$\frac{1}{1.25}$

♥♥ Simpson's Rule ♥♥♥ طريقة سمسون ♥♥♥
 في هذه الطريقة يجب ان تكون التقسيمات بعدد زوجي {4,6,8,10.....}

$$n = 2m$$

$$h = \frac{a-b}{n}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + y_n]$$

مثال (1) باستخدام طريقة سمسون أحسب قيمة التكامل وافرض n=4

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$h = \frac{1/2 - 0}{4} = \frac{1}{8}$$

$$A = \frac{1}{8 \cdot 3} \left[1 + 4 \cdot \frac{1}{1 + (\frac{1}{8})^2} + 2 \cdot \frac{1}{1 + (\frac{1}{4})^2} + 4 \cdot \frac{1}{1 + (\frac{3}{8})^2} + \frac{1}{1 + (\frac{1}{2})^2} \right]$$

$$= \frac{1}{24} \left[1 + \frac{256}{65} + \frac{32}{17} + \frac{256}{73} + \frac{4}{3} \right] = 0.4637$$

X	Y	F(x)
0	Y ₀	1
1/8	Y ₁	$\frac{1}{1 + (\frac{1}{8})^2}$
1/4	Y ₂	$\frac{1}{1 + (\frac{1}{4})^2}$
3/8	Y ₃	$\frac{1}{1 + (\frac{3}{8})^2}$
1/2	Y ₄	$\frac{1}{1 + (\frac{1}{2})^2}$

مثال (2) استخدام طريقة سمسون n=4 .

$$\int_0^1 x^2 dx$$

$$h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{1}{4 \cdot 3} \left[0 + 4 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{9}{16} + 1 \right]$$

$$= \frac{1}{12} [4] = \frac{1}{3} \text{ Sq. Unit.}$$

X	Y	F(x)
0		1
1/4		1/16
1/2		1/4
3/4		9/16
1		1

مثال (3) استخدام طريقة سمسون n=4 .

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

$$h = \frac{2-1}{4} = 0.25$$

$$A = \frac{0.25}{3} [1 + 4 * 0.8 + 2 * 0.066 + 4 * 0.57 + 0.5]$$

$$= 0.693 \text{ Sq.unt}$$

X	Y	F(x)
1	Y ₀	1
1.25	Y ₁	0.8
1.5	Y ₂	0.66
1.75	Y ₃	0.57
2	Y ₄	0.5

مثال (4) استخدام طريقة سمسون (n=6).

$$\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$$

$$h = \frac{3+3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$A = \frac{1}{3} [0 + 4 * \sqrt{13} + 2 * \sqrt{8} + 4 * 3 + 2 * \sqrt{8} + 4 * \sqrt{13} + 0]$$

$$A = \frac{1}{3} [14.4222 + 5.6568 + 12 + 5.6568 + 14.4222]$$

$$A = [17.386]$$

X	Y	F(x)
-3	Y ₀	0
-2	Y ₁	$\sqrt{13}$
-1	Y ₂	$\sqrt{8}$
0	Y ₃	3
1	Y ₄	$\sqrt{8}$
2	Y ₅	$\sqrt{13}$
3	Y ₆	0

تمارين تطبيقية :-

$$1) \int_1^4 \frac{2}{(1+x^2)} dx \quad n=5$$

$$2) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x} \quad n=4$$

$$3) \int_1^2 \sqrt{x} dx \quad n=5$$

$$4) \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{1+x}} dx \quad n=6$$

$$5) \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx \quad n=4$$

المتسلسلات والمتواليات. (Sequences and Series).

المتواليات: هي دالة مجالها (Z^+) مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة فاذا كان مجالها $\{1,2,3,4,5,.....\}$ فأنها متوالية غير منتهية. اما اذا كان مجالها من النوع $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ فأنها متوالية منتهية اما المجال المقابل للدالة فهو R مجموعة الاعداد الحقيقية. ويرمز لها بالرمز $\{ a_n \}$ او $\{ U_n \}$

$$\{ a_n \} = \{ a_1, a_2, a_3, a_4, \}$$

$$a_1 = at \quad n=1$$

$$a_2 = at \quad n=2$$

$$a_3 = at \quad n=3$$

.

.

المتتابعة الحسابية: وهي المتتابعة التي يكون فيها ناتج طرح كل حد من الذي يليه يساوي عدد ثابت ويسمى d .

$$d = U_{n+1} - U_n$$

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a + d$$

$$a_3 = (a + d) + d = a + 2d$$

$$a_4 = (a + 2d) + d = a + 3d$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

يستخدم لإيجاد عدد الحدود المجهولة n
العدد الثابت d يسمى الاساس.

مثال 1: اكتب المتوالية العددية التالية

$$a_n = n^2 + 1$$

$$n = \{7, 8, 9, 10, \dots, 20\}$$

$$a_1 = 1^2 + 1 = 2$$

$$a_2 = 2^2 + 1 = 5$$

$$a_3 = 3^2 + 1 = 10$$

:

$$a_{20} = 20^2 + 1 = 401$$

$$\therefore \{a_n\} = \{2, 5, 10, \dots, 401\}$$

مثال 2: اكتب المتوالية العددية التالية حيث ان

$$\{U_n\} = \left\{ \begin{array}{l} 1/n^2 \quad \text{فردى} \quad n \leq 5 \\ n+1 \quad \text{زوجى} \quad n \leq 6 \end{array} \right\}$$

$$U_1 = 1/1^2 = 1$$

$$U_2 = 2+1 = 3$$

$$U_3 = 1/3^2 = 1/9$$

$$U_4 = 4+1 = 5$$

$$U_5=1/5^2=1/25$$

$$U_6=6+1=7$$

$$\{ U_n \} = \{ 1 , 3 , 1/9 , 5 , 1/25 , 7 \}$$

مثال 3: جد الحد العاشر من المتتابعة الحسابية التي حدها الاول يساوي 3 واساسها يساوي 3 .

$$a=3$$

$$d=3$$

$$a_{10}=a+9d$$

$$a_{10}=3+9*3=30$$

مثال 4: اكتب المتتابعة التي حدها الاول 7 واساسها 3- . او اكتب قيمة الحدود الستة الاولى فقط.

$$a=7$$

$$d=-3$$

$$a_1=7$$

$$a_2=a_1+d=7-3=4$$

$$a_3=a_1+2d=7+2(-3)=1$$

$$a_4=a_1+3d=7+3(-3)=-2$$

$$a_5=a_1+4d=7+4(-3)=-5$$

$$a_6=a_1+5d=7+5(-3)=-8$$

$$\{a_n\}=\{7,4,1,-2,-5,-8,\dots\}$$

مثال 5: متتابعة حسابية حدها الثالث 9 وحدها السابع 3 - أوجد الحدود المحصورة بين الثالث والسابع .

$$a_3=a+2d \longrightarrow 9=a+2d \dots\dots\dots 1$$

$$a_7=a+6d \longrightarrow -3=a+6d \dots\dots\dots 2$$

بحل المعادلتين انيا بواسطة الطرح ينتج المعادلة التالية

$$12= - 4d$$

$$d=12/-4= - 3$$

$$9=a+(2*-3)$$

بالتعويض في معادلة 1

$$9=a-6$$

$$a_1=15$$

$$a_3=9$$

$$a_2=a+d=15+(-3)=12$$

$$a_4=a+3d=15+(3*-3)=6$$

$$a_5=a+4d=15+(4*-3)=3$$

$$a_6=a+5d=15+(5*-3)=0$$

$$a_7=a+6d=15+(6*-3)= - 3$$

$$\{a_n\}=\{15,12,9,6,3,0, - 3\}$$

مثال 6: جد عدد الحدود n للمتتابعة الحسابية .

$$\{a_n\} = \{-20, -17, -14, \dots, 55\}$$

$$a = a_1 = -20 \quad \text{الحد الاول}$$

$$d = a_2 - a_1 = -17 - (-20) = 3 \quad \text{الاساس}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$55 = -20 + (n-1) \cdot 3$$

$$55 = -20 + 3n - 3$$

$$55 = -23 + 3n$$

$$55 + 23 = 3n$$

$$78 = 3n$$

$$n = 78/3$$

$$n = 26 \quad \text{عدد حدود المتتابعة الحسابية}$$

ايجاد مجموع حدود المتتابعة الحسابية المنتهية

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n\}$$

$$S_n = (n/2) [a + a_n]$$

ايجاد مجموع حدود المتتابعة الحسابية غير المنتهية

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$$

$$S_n = (n/2) [2a + (n-1)d]$$

مثال 7: اوجد مجموع 20 حدا من المتتابة الحسابية حدها الاول (-8) والعشرين (48).

$$a_1 = -8$$

$$a_{20} = 48$$

$$n=20$$

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

$$S_n = \frac{20}{2} [-8 + 48]$$

$$S_n = 10[40] = 400$$

Summation is 400

مثال 8: اوجد مجموع حدود المتتابة الحسابية {1,2,3,.....,100}

$$a_1 = 1$$

$$d = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$

∴ المتتابة منتهية

$$n = 100$$

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

$$S_n = \frac{100}{2} [1 + 100]$$

$$S_n = 50[101] = 5050$$

مثال 9: اوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية {2,5,8,.....,29}

$$a_1 = 2$$

$$d = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$29 = 2 + (n-1) \cdot 3$$

∴ المتتابعة منتهية

$$29 = -1 + 3n$$

$$3n = 30$$

$$n = 10$$

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

$$S_n = \frac{10}{2} [2 + 29]$$

$$S_n = 5[31] = 155$$

مثال 10: المتتابعة الحسابية التي حدها الثاني = 4 وحدها ما قبل الاخير (22) وعدد حدودها 12 جد مجموعها .

$$\{-, 4, -, \dots, 22, a_n\}$$

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$$

$$a_1 + a_n = 4 + 22$$

$$a_1 + a_n = 26$$

$$n = 12$$

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

$$S_n = \frac{12}{2} [26]$$

$$S_n = 6[26] = 156$$

ايجاد مجموع حدود المتتابعة الحسابية الغير المنتهية

مثال 11: جد مجموع الحدود الثمانية الاولى من المتتابعة التالية

{ - , 4 , 1 , 6 , }

$$S_n = \left(\frac{n}{2}\right) [2a + (n-1)d]$$

$$n = 8$$

$$a_1 = -4$$

$$d = a_2 - a_1 = 1 - (-4) = 5 \quad \text{الاساس.....}$$

$$S_n = \left(\frac{8}{2}\right) [2(-4) + (8-1)5]$$

$$S_n = (4)[-8 + 7 \cdot 5]$$

$$S_n = (4)[-8 + 7 \cdot 5]$$

$$S_n = (4)[27] = 108$$

مثال 12: إذا كان مجموع n حدا من المتتابة الحسابية $3n^2+2n$ فما هو حدها العشرين (20).

$$S_n=3n^2+2n$$

مجموع الحد العشرون..... $S_{20}=(3*20^2)+(2*20)$

$$S_{20}=1200+40=12400$$

مجموع الحد التاسع عشر..... $S_{19}=(3*19^2)+(2*19)$

$$S_{19}=(3*361)+(38)=1121$$

$$a_{20} = S_{20} - S_{19}$$

$$a_{20}=1240-1121=119$$

مثال 13: جد مجموع الاعداد الصحيحة المحصورة بين 400 و100 وتقبل القسمة على 3.
 $d=3$

$$100/3=33 \quad \text{والباقي 1}$$

$$400/3=133 \quad \text{والباقي 1}$$

$$133*3=399 \quad \text{الحد الاخير } a_n$$

$$33*3=102 \quad \text{الحد الاول } a_1$$

$$\{102, \dots, 399\}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$399 = 102 + (n-1)*3$$

$$n=100$$

$$S_n = n/2 [a_1 + a_n]$$

$$S_n = 100/2 [102 + 399]$$

$$S_n = 25050$$

المتتابة الهندسية : وهي المتتابة التي ليس فيها حد يساوي صفر ويكون ناتج القسمة لأي حد فيها على سابقة يساوي مقدار ثابت R.

$$R = a_{n+1}/a_n \quad \text{or} \quad r = a_{n+1}/a_n$$

انواع المتتابعات الهندسية :

1- اذا كانت a_1 موجبة

$r < 1$ (موجبة) تكون المتتابة الهندسية تنازلية {4,2,1,1/2.....}

$r = 1$ تكون المتتابة الهندسية ثابتة {2,2,2,2.....}

$r > 1$ (موجبة) تكون المتتابة الهندسية تصاعدية {4,8,10,.....}

$r < 1$ (سالبة) تكون المتتابة الهندسية تنازلية الحد الاول موجب والحد الثاني سالب والثالث موجب والرابع سالب وهكذا {4,-

2,1,- 1,2.....}

2- اذا كانت a_1 سالبة

$r < 1$ (موجبة) تكون المتتابة الهندسية تصاعدية

{-4,-2,-1,-1/2,.....}

$r = 1$ تكون المتتابة الهندسية ثابتة {-2,-2,-2,-2.....}

$r > 1$ (موجبة) تكون المتتابة الهندسية تصاعدية

{-4,-8,-16,}

$r < 1$ (سالبة) تكون المتتابعة الهندسية تنازلية الحد الاول سالب والحد الثاني موجب والثالث سالب والرابع موجب

وهكذا {-4, 2,-1, 1,2.....}

$$R = a_{n+1}/a_n$$

$$a_1 = a$$

$$a_2 = ar$$

$$a_3 = a * r * r = ar^2$$

$$a_4 = a r^2 * r = ar^3$$

$$a_5 = a r^3 * r = ar^4$$

$$a_6 = a r^4 * r = ar^5$$

$$a_{10} = a r^8 * r = ar^9$$

$$a_{25} = a r^{23} * r = ar^{24}$$

$$a_n = ar^{n-1}$$

مثال 1: اكتب الحدود الستة الاولى من المتتابعة الهندسية التي حدها الاول (64) واساسها $(-1/2)$.

$$a_1 = a = 64$$

$$a_2 = ar$$

$$a_2 = ar = 64 * (-1/2) = -32$$

$$a_3 = ar * r = -32 * (-1/2) = 16$$

$$a_4 = a r^2 * r = 16 * (-1/2) = -8$$

$$a_5 = a r^3 * r = -8 * (-1/2) = 4$$

$$a_6 = a r^4 * r = ar^5 * (-1/2) = -2$$

$$\{a_n\} = \{64, -32, 16, -8, 4, -2, \dots\}$$

مثال 2: جد الحد السابع من المتتابعة الهندسية التي حدها الاول $1/4$ واساسها (2).

$$a_7 = ar^6$$

$$a_7 = -1/4 * 2^6 = -1/4 * 64 = -16$$

مثال 3: جد الحد الثامن من المتتابعة الهندسية التي حدها الاول (3) والخامس (48).

$$a_5 = ar^4$$

$$48 = 3 * r^4 \quad \dots\dots\dots /3$$

$$16 = r^4$$

$$2^4 = r^4$$

$$r = \pm 2$$

$$a_8 = ar^7$$

$$a_8 = 3 * (\pm 2)^7$$

$$a_8 = 3 * (\pm 128)$$

$$a_8 = \pm 384$$

مثال 4: جد الحد السادس لمتوالية هندسية مجموع حدودها الثلاثة الاولى (7) وحدها الثالث (1).

$$a_1 + a_2 + a_3 = 7$$

$$a + ar + ar^2 = 7$$

$$a_3 = 1$$

$$a_3 = ar^2$$

$$ar^2 = 1$$

$$a = 1/r^2$$

$$(1/r^2) + (1/r^2) * r + (1/r^2) * r^2 = 7$$

$$(1/r^2) + (1/r) + 1 = 7$$

$$(1/r^2) + (1/r) + 1 - 7 = 0 \quad \dots \quad * r^2$$

$$1 + r - 6r^2 = 0 \quad \dots \quad -1$$

$$6r^2 - r - 1 = 0$$

$$(3r+1)(2r-1) = 0$$

$$\text{if } 3r+1=0 \longrightarrow$$

يهمل لان المتتابة موجبة $r=-1/3$

$$2r-1=0$$

$$r=1/2$$

الاساس

$$a_1 = 1/(1/2)^2 = 4$$

$$a_6 = a_1 * r^5$$

$$a_6 = 4 * (1/2)^5 = 4 * 1/32 = 1/8$$

$$a_6 = 1/8$$

$$\{a_n\} = \{4, \dots, \dots, \dots, 1/8, \dots, \dots\}$$

مجموع المتتابة الهندسية النهائية:

$$\{a_n\} = \{4, 8, 16, 32, 64, 128\}$$

$$S_n = \frac{a(1 - (r)^n)}{(1 - r)}$$

مثال 5: جد مجموع ستة من الحدود الاولى من المتتابة الهندسية

$$\{a_n\} = \{64, 32, 16, \dots, \dots\}$$

$$a = 64$$

$$a_2 = 32$$

$$r = a_2/a_1$$

$$r = 32/64 = 1/2$$

$$n = 6$$

$$S_6 = \frac{64(1 - (1/2)^6)}{(1 - 1/2)}$$

$$S_6 = \frac{64(1 - (1/64))}{1/2}$$

$$S_6 = \frac{64(63/64)}{1/2}$$

$$S_6 = 63 * 2 = 126$$

مجموع متتابعة هندسية اللانهائية:

$$S_n = \frac{a}{1 - r}$$

مثال 6: جد مجموع المتتابعة

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{4} * 2 = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{1/2}{1 - 1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

مثال 7: جد مجموع المتتابعة الهندسية

$$\{0.4, 0.04, 0.004, \dots, \infty\}$$

$$0.4+0.04+0.004+\dots+\infty$$

$$a = a_1 = 0.4$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{0.04}{0.4} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{0.4}{1-0.1} = \frac{0.4}{0.9} = \frac{4}{9}$$

مثال 8: جد مجموع المتتابعة الهندسية

$$64-16+4-\dots$$

$$a = 64$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-16}{64} = \frac{-1}{4}$$

$$S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{64}{1-(1/4)} = \frac{64}{5/4} = 64 * \frac{4}{5} = \frac{256}{5}$$

مثال 9: اذا كان مجموع متتابعة هندسية اساسها=3 هو 728 وحدها الاخير هو 486 جد حدها الاول وعدد حدودها؟

$$S_n = 728$$

$$r = 3$$

$$728 = \frac{a(1-3^n)}{1-3}$$

$$728 = \frac{a(1 - 3^n)}{-2}$$

$$a - a3^n = -1456$$

$$a_n = 486$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$486 = a3^{n-1}$$

$$[486 = a \cdot 3^n \cdot 3^{-1}] * 3$$

$$1458 = a3^n$$

نعوض معادلة 2 في معادلة 1

$$a - 1458 = -1456$$

$$a = 1458 - 1456 = 2$$

$$a = 2$$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$[486 = 2 * r^{n-1}] * 3$$

$$1486 = 2 * 3^n$$

$$3^6 * 2 = 2 * 3^n$$

$$3^6 = 3^n$$

$$n = 6$$

$$n = 6 \text{ وعدد الحدود} \quad a_1 = 2$$

المصادر :-

- (1) طرق عددية د. علي سيفي
- (2) طرق حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية وتطبيقاتها د. رياض شاكر
- (3) الرياضيات / رشيد حازم مجيد عسكر ، قاسم عبد الرزاق
- (4) **References Calculus (Thomas)**
- (5) **Series Shomes**
- (6) حساب التفاضل والتكامل / فرانك أيرز.
- (7) التفاضل والتكامل / خالد احمد السامرائي .
- (8) الجبر والهندسة التحليلية / د. فؤاد محمد .
- (9) مبادئ الجبر الخطي د.موفق حجه ، د.محمد هيلات .
- (10) مقدمة في المعادلات التفاضلية الاعتيادية وتطبيقاتها
د.سمير يشير حديد ، د.علي محمد صادق سيفي .